

Gleichungen I

- Ausgabe B -

(ZweiPLUS für den Mathematikunterricht)

Auszugsweise

F. Rothe

Gleichungen I

F. Rothe

Rothe, Frank:

„Gleichungen I“, - Ausgabe B -,
(ZweiPLUS für den Mathematikunterricht),
BNR: 165152

Gleichungslehre für Anfänger, unter besonderer Berücksichtigung der
Begabungen und der individuellen Lernpotenziale der SchülerInnen

3. komplett überarbeitete und erweiterte Neuauflage

Alle Rechte vorbehalten!

© 2012 Frank Rothe, Salzburg, im Selbstverlag

Homepage: www.calculemus.at

Für die Bilder konnten trotz sorgfältiger Recherche nicht alle
Urheberrechte endgültig geklärt werden. Wir bitten ggf. um
Information. Es wird das branchenübliche Engelt gezahlt.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2		
Übungen	3	PLUS – Aufgaben	22
Der Lehrling:		PLUS zum Knobeln	22
Vom Zahlenrätsel zur Gleichung	3	PLUS 01	22
Übungen 1	3	PLUS 02	23
Übungen 2	4	PLUS 03	24
Übungen 3	5		
Übungen 4	6	PLUS zum Abwägen	25
Ergänzung: Wiederholungsübungen (1-4).....	7	PLUS 04	25
		PLUS 05	26
Der Geselle:		PLUS 06	27
Gleichungen mit Überschuss lösen!	8		
Übungen 5	8	PLUS zum Anwenden	28
Übungen 6	9	PLUS 07	28
Übungen 7	10	PLUS 08	29
Übungen 8 (Überschuss & Umformen).....	11	PLUS 09	30
Der Meister:		Weitere Übungen	31
Das systematischen Umformen von		Lösungen zu den Übungen	33
Gleichungen	12	Lösungen zu den Weiteren Übungen	35
Übungen 9	12	Mathematische Fachausdrücke	36
Übungen 10	13	"Rückgängig machen!"	36
Übungen 11	14	"Umformen"	37
Übungen 12	15	"Überschüsse"	38
		PLUS - Symbole	40
Übungen 13 (Gesamtwiederholung) ...	16		
Kontrolliere dich selber -			
Gleichungen I	17		
Tipps zu den Übungen	18		

Vorwort

„Gleichungen I“ ist ein Projekt zur Einführung in die Gleichungslehre.

Die Zahlenrätsel zu Beginn bilden die Kernidee der Gleichungen. Das Lösen mit Überschüssen ist etwas für Denker und Denkerinnen. Die Meisterschaft zeigt sich am Ende beim systematischen Umformen der Gleichungen.

Du wirst dir mathematischen Fähigkeiten *im Verstehen, Lösen und Entwickeln von Gleichungen* erwerben.

Ich denke mir eine Zahl ...
Wenn ich zu ihrem Zweifachen
7 addiere, bekomme ich 13.

$$\begin{array}{r} 2x + 7 = 13 \\ 2x = 6 \\ x = 3 \end{array}$$

Bei den „**Übungen**“ hast du richtig viel zu rechnen. Jedes Arbeitsblatt ist einem eigenen Themenaspekt gewidmet. Insgesamt werden die Aufgaben auf jeder Seite zunehmend vielfältiger - und schwerer. Auf jeder Seite findest du grundlegende und * Stern-Aufgaben. Die PLUS-Aufgaben stehen weiter hinten.

1. Ein Beispiel mit vielen wichtigen Grundaufgaben

2. Löse immer dieses Zahlenrätsel

3. * Stern – Aufgaben werden schwerer und anspruchsvoller ...

... die grauen Kreise sind **Tipps** zum Nachschauen!

„PLUS-Aufgaben“ sind *anders* ...

Die „**Lösungen zu den Übungen**“ findest du hinten im Buch. Allerdings nicht zu den spannendsten Aufgaben...

„Gleichungen I“ gibt es in zwei Ausgaben:

- Ausgabe B - Schülerausgabe (mit Lösungen zu den Übungen)
- Ausgabe C - Lehrerausgabe (Übungen mit. Lösungen und methodisch-didaktische Hinweise zum Unterricht)

Wenn du Fehler findest, Anregungen oder Fragen hast, wende dich bitte an mich:

Frank Rothe, email: frank.rothe@utanet.at
Samstr. 49 B, A-5023 Salzburg homepage: www.calculemus.at

Langer Rede kurzer Sinn...

...und nun viel Spaß und Erfolg mit „Gleichungen I“

Frank Rothe

Wie arbeiten die Schüler?
Im Unterricht lösen sie ...
* die Übungen...

Übungen 5

Beispiel mit Bild

$$4x + 1 = 2x + 5$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

b) $5x + 35 = 9x + 7$

c) $2x + 14 = 11x + 5$

d) $3x + 16 = 8x + 1$

e) $16x + 2 = 13x + 23$

f) $15x + 5 = 3x + 29$

g) $27x + 7 = 12x + 52$

h) $5x + 46 = 12x + 4$

i) $2x + 61 = 14x + 1$

j) $30x + 36 = 33x + 3$

k) $8x + 2 = 9x$

l) $12x = 11x + 4$

3. Löse die Gleichungen mittels Überschüssen. PROBE!

a) $8x + 12 = 3x + 27$

b) $11x + 5 = 7x + 45$

2. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich zu ihrem Elffachen 6 addiere, bekomme ich gleich viel wie wenn ich zu ihrem Sechsfachen 26 addiere.

4.* Es wird anspruchsvoller ... Löse die Gleichungen mittels Überschüssen.

15) a) $8x + 15 - 2 = 6x + 21$

b) $5 + 4x + 3 = 10x + 2$

c) $17x + 10 + 3 = 30 + 14x - 2$

d) $40,5 + 3,3x + 1,7 = 7,8x + 7,2 + 2,5x$

16) e) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1,5x = \frac{115}{10} + x$

17) f) $7x - 2 = 3x + 6$

Probe:
(von f)

5.* Überlege dir eine leichte und eine schwere Gleichung, die man mit Überschüssen lösen kann. Schreibe die Gleichungen (für die anderen) an die Tafel. Löse die Gleichungen ...

15. **Tipp (Übungen 5, Nr. 4 a):**

Zuerst zusammenfassen:

$$8x + \underbrace{15 - 2} = 6x + 21$$

$$8x \quad \dots \quad = 6x + 21$$

Bei einigen Aufgaben - mit den grauen Nummerierung gibt es ...
* ... einige Tipps zu den Übungen

16. **Tipp (Übungen 5, Nr. 4 e):**

Erster Tipp für das Zusammenfassen:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1,5x = \dots$$

$$0,5x + \frac{1}{2} + 1,5x = \dots$$

Zweiter Tipp für den Überschuss:

Um wie viel ist

$$\frac{115}{10} \text{ größer als } \frac{1}{2} ?$$

Erweitere und vergleiche

$$\frac{115}{10} \text{ mit } \frac{1}{2} = \frac{\dots}{10}$$

17. **Tipp (Übungen 5, Nr. 4 f):**

Überlege und ergänze:

+6 ist um ... größer als +2 !

+6 ist um ... größer als 0 !

+6 ist um ... größer als -2 !

Nun kennst du den Zahlenüberschuss.

Musterseiten - Gleichungen I (Schülerausgabe)

Weitere Übungen 5

1. Löse die Gleichungen mit Hilfe von Überschüssen.

- a) $8x + 3 = 2x + 21$ b) $9x + 4 = 5x + 32$
c) $5x + 23 = 10x + 3$ d) $8x + 11 = 11x + 5$
e) $8x = 7x + 6$

2. Löse die Gleichungen mittels Überschüssen. Probe!

- a) $12x + 3 = 8x + 23$ b) $5x + 20 = 7x + 2$

3. Notiere das Zahlenrätsel (in Worten). Achte auf die Reihenfolge (von links nach rechts). Löse!

$$9x = 5x + 40$$

4.* Löse die Gleichungen mit Hilfe von Überschüssen.

- a) $9x + 3 + 2x = 4x + 47 - 2$
b) $20,7 + 0,5x = 0,7 + 40,5x$
c) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x + 3 = 5x + 0$

Als Hausaufgaben dienen die ...
* Weitere Übungen...

Musterseiten - Gleichungen I (Schülerausgabe)

Lösungen zu Übungen 5

1. a) $x = 5$ b) $7 = x$ c) $1 = x$ d) $3 = x$
e) $x = 7$ f) $x = 2$ g) $x = 3$ h) $6 = x$
i) $5 = x$ j) $11 = x$ k) $2 = x$ l) $5 = x$
2. $11x + 6 = 6x + 26, \quad x = 4$
3. a) $x = 3$ b) $x = 10$
4. a) $x = 4$ b) $1 = x$ c) $x = 5$
d) $5 = x$ e) $x = 11$ f) $x = 2$

Weiter hinten stehen ...
* die Lösungen zu den Übungen...

Musterseiten - Gleichungen I (Schülerausgabe)

Lösungen zu Weitere Übungen 5

1. a) $x = 3$ b) $x = 7$
c) $4 = x$ d) $2 = x$
e) $x = 6$
2. a) $x = 5$ b) $2 = x$
5. Ich denke mir eine Zahl. Das Neunfache der Zahl ist genau so groß, wie wenn ich zum Fünffachen der Zahl 40 addiere.
 $x = 10$
- 3.* a) $x = 6$ b) $0,5 = x$ c) $1 = x$

Weiter hinten stehen ...
* die Lösungen zu den
Weiteren Übungen...

Musterseiten - Gleichungen I (Schülerausgabe)

Übungen 1

1. Schreibe das Zahlenrätsel als Gleichung. Löse es (schrittweise). Ich denke mir eine Zahl, ...

Beispiel

a) wenn ich zu ihrem Zweifachen 7 addiere, bekomme ich 13

$$2x + 7 = 13 \quad \text{Gleichung!}$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Probe: $2 \cdot 3 + 7 = 13$
 $6 + 7 = 13$

b) wenn ich zu ihrem Zweifachen 11 addiere, bekomme ich 21.

$$\dots \dots \dots = \dots$$

$$=$$

$$=$$

Probe:

c) wenn ich zu ihrem Dreifachen 6 addiere, bekomme ich 27

Probe:

d) wenn ich von ihrem Dreifachen, 5 subtrahiere, bekomme ich 19.

e) wenn ich von ihrem Fünffachen 4 subtrahiere, bekomme ich 26.

f) wenn ich von ihrem Achtfachen 3 subtrahiere, bekomme ich 29.

2. Notiere das Zahlenrätsel. Löse es anschließend (schrittweise)! Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich ...

b) ...

c) ...

$$5x + 7 = 22$$

$$2x - 3 = 19$$

$$7x - 2 = 5$$

3.* Gemischte Zahlenrätsel! Schreibe sie als Gleichung. Löse sie! Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich zu ihrem Neunfachen 14 addiere, bekomme ich 41.

b) wenn ich zu dieser 7 addiere, bekomme ich 13.

c) wenn ich von dieser 4 subtrahiere, erhalte ich 8.

4.* Gemischte Zahlenrätsel. Notiere das Zahlenrätsel. Löse es! Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich...

b) ...

c) ...

$$8x + 5 = 53$$

$$x \cdot 9 = 63$$

$$7x - 13 = 29$$

5. Schreibe das Zahlenrätsel als Gleichung. Löse es (schrittweise). PROBE!** Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich zu ihrem Achtfachen 191 addiere, ergibt sich 999.

b) wenn ich von Ihrem Vierzehnfachen 17,5 subtrahiere, bekommt man 38,5.

c) wenn ich von dieser zuerst 2 subtrahiere und anschließend - alles - mit 5 multipliziere, erhalte ich 35.

So sieht eines der hinteren Übungsblätter aus.
Rechts siehst du auch den Hinweis auf die anspruchsvollen PLUS-Aufgaben ...

Übungen 12



1. Löse durch Umformen. Beachte: Was gleicht sich aus? Rechenvorhaben anschreiben!

a) $8x - 2 - 3 = 16 + 6x - 3$ b) $8x + 20 + 4x = 4x - 4 + 11x$ c) $2 + 11x - 6 = 30 - 6 + 7x$

d) $39 + 2x + 5 = 7 \cdot (x + 2) + 5$ e) $6 + 14x + 8 = 8 \cdot (x + 4) + 6$ f) $4 \cdot (x + 3) + 2 = 11x + 2 - 9$

g) $8x - 4 + 2x = 2x + 12$ h) $2x + 7 = 9x + 2x - 2$

3.* Gemischte Gleichungen. Ausgleich? Umformen! Rechenvorhaben anschreiben!

a) $2 + 6x - 5 = 5x - 17 + 3x$ b) $7 \cdot (x + 3) + 4 = 4x + 4 + 39$

c) $7 \cdot (3 + x) = 777$

d) $\frac{168}{4} = 2x$

f) $5 + 2x - 10 - 4x = -25 + 2x$

38) g) $z \cdot (1 \cdot 5) = (9z + 3) \cdot \frac{1}{3}$

39) h) $4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 4x \right) = 6x + 14$

** Probe (von h):

40) i) $(100 + 4) \cdot (x + 4) = 4x + 417$

41) j) ** $(x + 2) \cdot (x + 6) = x^2 + 7x + 20$

k) ** $(x + 3) \cdot (x + 4) = x \cdot (x + 3) + 40$

2. Ergänze, verbessere den Fehler (in der Gleichung) und löse! Wenn ich von 38 meine Zahl subtrahiere, bekomme ich ...

$x - 38 = 4 \cdot (x + 2)$

e) $4 \cdot (x + 2) + 4 = (1 + x) \cdot 8$

Die PLUS-Aufgaben!
... hier ist PLUS 2 als
Beispiel.

PLUS 2

1. Notiere das Zahlenrätsel in Worten und löse es!

$2x + 6x - 77 = 323$

2. Zwei Zahlen ... eine kleine und eine große.

a) Wenn ich beide Zahlen addiere, bekomme ich 12.
UND wenn ich zur Kleineren 6 addiere, bekomme ich die Große.

b) **Erfinde ...** ein eigenes Rätsel mit **zwei Zahlen**. Notiere den Text und schreibe ihn an die Tafel. **Löse ...** die Rätsel deiner Klassenkamerad/innen von der Tafel.



3. Ergänze ... die Beispiele!

<table style="width: 100%;"><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>...</td></tr><tr><td>5</td><td>...</td></tr><tr><td>13</td><td>...</td></tr></table>	1	5	2	6	3	7	4	...	5	...	13	...	<table style="width: 100%;"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>...</td></tr><tr><td>5</td><td>...</td></tr><tr><td>30</td><td>...</td></tr></table>	1	3	2	6	3	9	4	...	5	...	30	...	<table style="width: 100%;"><tr><td>4</td><td>10</td></tr><tr><td>6</td><td>12</td></tr><tr><td>8</td><td>14</td></tr><tr><td>...</td><td>16</td></tr><tr><td>...</td><td>80</td></tr><tr><td>...</td><td>91</td></tr></table>	4	10	6	12	8	14	...	16	...	80	...	91	<table style="width: 100%;"><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>10,5</td></tr><tr><td>12</td><td>...</td></tr><tr><td>15</td><td>...</td></tr><tr><td>81</td><td>...</td></tr></table>	2	3	4	6	7	10,5	12	...	15	...	81	...
1	5																																																		
2	6																																																		
3	7																																																		
4	...																																																		
5	...																																																		
13	...																																																		
1	3																																																		
2	6																																																		
3	9																																																		
4	...																																																		
5	...																																																		
30	...																																																		
4	10																																																		
6	12																																																		
8	14																																																		
...	16																																																		
...	80																																																		
...	91																																																		
2	3																																																		
4	6																																																		
7	10,5																																																		
12	...																																																		
15	...																																																		
81	...																																																		

4. Ich denke mir drei „aufeinanderfolgende“ Zahlen der Sechserreihe. Wenn ich diese alle addiere, bekomme ich 216 heraus.

6, 12, 18
oder ...
54, 60, 66
oder ...
132, 138, 144
oder ...

Wie lautet die kleinste dieser drei Zahlen?
Welches sind die beiden Zahlen?

5. Welche Gleichung gehört zu welchem Zahlenrätsel (-text)? Zeichne einen Pfeil, wo es passt.

- c) $x + 3 = 8x$
- d) $6x + 5 = 5$
- e) $2x - 6 = x : 2$
- f) $6 + 5x = 56$
- g) $x : 2 = x - 6$ ←

1. Wenn ich vom Zweifachen der Zahl 6 subtrahiere, bekomme ich die Hälfte der Zahl.
2. Wenn ich zu einer Zahl 3 addiere, erhalte ich 8.
3. Die Summe von Sechs und dem Fünffachen der Zahl ergibt Sechshundfünfzig.
4. Die Zahl halbiert ist gleich groß wie die Zahl um 6 verkleinert.
5. Zum Sechsfachen der Zahl Fünf addiert ergibt genau 5.

6. „Ich denke mir drei aufeinanderfolgende (natürliche) Zahlen. Wenn ich dies alle addiere, bekomme ich 666 heraus.“



Florian hat so gerechnet:

```

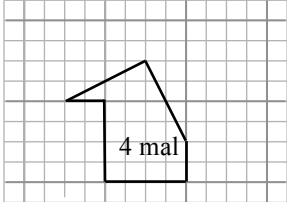
666 : 3 = 222
06
06
06
06
+ 222
+ 222
+ 222
-----
666
    
```

Erkläre Florians Rechenweg in deinen Worten:

7. Puzzle.



Übertrage und schneide aus. Die vier Teile kannst du zu einem ■ oder einem + zusammenlegen. Versuche beides! Welche Form ist dir leichter gefallen?



1. **Notiere das Zahlenrätsel in Worten und löse es!**


$$12x = 200 - 3x - 50$$

2. **Löse** (u. schreibe die *Gleichung für k* auf!)
Zwei Zahlen ... eine kleine und eine große.
 Wenn ich beide Zahlen addiere, bekomme ich 1000. UND wenn ich zur Kleineren 350 addiere, bekomme ich die Große.

3. **Ergänze ...** die Beispiele!

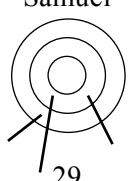
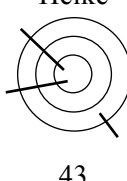
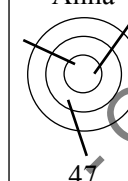

1	5	-0,8	1	1	4	4,2
3	15	0,2	2	4	16	16,2
4,1	20,5	1,2	4	7,2	28,8	29
5	5	5
2,2	7,8	40
<i>k</i>	<i>g</i>	<i>k</i>
...	<i>g</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	...

4. **Erfinde ...** die Beispiele indem du überlegst und die obersten drei Zeilen ausfüllst. Schreibe deine Beispiele – für die anderen - an die Tafel.



1
...
...
...
...
<i>k</i>
...

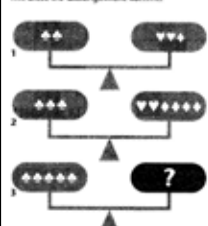
5. **Bogenschießen ...** Wie viel Punkte hat Tim?







<p>Samuel</p>  <p>29 Punkte</p>	<p>Heike</p>  <p>43 Punkte</p>	<p>Anna</p>  <p>47 Punkte</p>	<p>Tim</p>  <p>...? Punkte</p>
--	---	--	---

6. **Knobelei mit Waage**

- Was bekommst du raus?
- Es gibt verschiedene Antworten. Finde eine Antwort nur mit „Karo“. Dabei darf es auch „halbe Karos“ geben
- Erfinde ...** eine eigenen „Knobelei mit Waage“.

KNOBELEI
 Waage 1 und Waage 2 sind ausbalanciert. Was muss bei Waage 3 eingesetzt werden, damit diese ins Gleichgewicht kommt?



A  B  C  D  E  F 

$x = (x + 66) : 2$
 $1,5x = 33$
 $x = 22$ 11 Hühner
 22 Schweine

Probe: $22 = (22 + 66) : 2$
 $22 = 44$

7. **Bauernhof ...** „Auf einem Bauernhof gibt es doppelt so viele Schweine wie Hühner. Hätten die Hühner noch zusätzlich 66 Extrabeine, hätten sie gleichviele Beine wie die Schweine.“

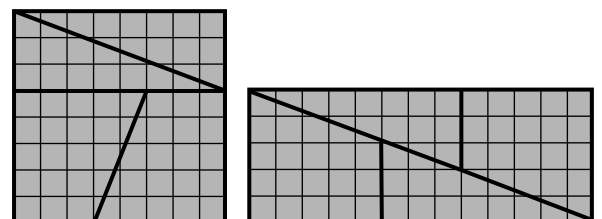


Erkläre ... in deinen Worten, wie Florian die Bauernhofaufgabe gelöst hat? Tipp: Florian denkt sich für x die Anzahl der Hühnerbeine. Und was hat Florian vergessen?

8. **Die merkwürdig Vermehrung ...**



- Das linke Quadrat wurde unterteilt und anschließend zum Rechteck umgelegt. Wie genau?
- Zähle die Kästchen! Etwas ist merkwürdig. Was?
- Finde eine Erklärung!



Gleichungen I

- Ausgabe C -

(ZweiPLUS für den Mathematikunterricht)

Auszugsweise

F. Rothe

Gleichungen I

F. Rothe

Rothe, Frank:

„Gleichungen I“, - Ausgabe G -,
(ZweiPLUS für den Mathematikunterricht),

Gleichungslehre für Anfänger, unter besonderer Berücksichtigung der
Begabungen und der individuellen Lernpotenziale der SchülerInnen

3. komplett überarbeitete und erweiterte Neuauflage

Alle Rechte vorbehalten!

© 2013 Frank Rothe, Salzburg, im Selbstverlag

Homepage: www.calculemus.at

Für die Bilder konnten trotz sorgfältiger Recherche nicht alle
Urheberrechte endgültig geklärt werden. Wir bitten ggf. um
Information. Es wird das branchenübliche Entgelt gezahlt.

Inhaltsverzeichnis

Methodischer Teil

Vorwort	2
Einleitung	3
Theorie der Gleichungen	6
Was sind Gleichungen?	6
Gleichungen (kennen-)lernen	10
Theorie der Differenzierung	12
Zeitliche Struktur von ZweiPLUS	12
Inhaltliche Struktur von ZweiPLUS	13
Grundlegend.....	13
Erweiternd.....	14
PLUS - Aufgaben.....	14
Ressourcenecke.....	15
Stützprojekte	15
Interessensprojekte.....	16
Gruppen- und Teamarbeit.....	16
Rolle des Lehrers	17
Praxis und Organisation	18
Vielfältige Gestaltungsmöglichkeiten.....	18
Zeitplanung & inhaltliche Schwerpunkte.....	18
Inhaltlicher Aufbau und Ziele der Themen.....	21
Vom Zahlenrätsel zur Gleichung.....	21
Gleichungen mit Überschuss lösen.....	21
Das systematische Umformen v. Gl.	22
Differenzierung - konkret.....	24
Grundlegend & Erweiternd (1.Stufe)	24
PLUS (2. Stufe).....	25
Die eigene Lernspur finden!	25
Gruppenarbeit	26
"Aufgabe des Tages"	27
Zahlenrätsel im Kopfrechnen.....	27
Elementare Zahlenrätsel	29
Zwei-Zahlen-Rätsel	31
Mathematische Schreibweise	40
Knacknüsse & Erstaunliches	42
Bemerkungen zur Probe.....	45
Die tägliche Praxis	49
Allgemeines	49
Stundenaufbau.....	51
Vorbereitung der einzelnen Stunde.....	52
Übersicht zu den Inhalten und Lernzielen	54
Gesamtübersicht von Gleichungen I.....	54
Detailübersicht der Inhalte und Lernziele.....	58

Aufgabenteil

Übungen (mit didaktischen Hinweisen) .	61
Der Lehrling:	
Vom Zahlenrätsel zur Gleichung.....	62
Übungen 1	62
Übungen 2	64
Übungen 3	66
Übungen 4	68
Ergänzung: Wiederholungsübungen (1-4).....	70
Der Geselle:	
Gleichungen mit Überschuss lösen!	72
Übungen 5	72
Übungen 6	74
Übungen 7	76
Übungen 8 (Überschuss & Umformen)	78
Der Meister:	
Systematisches Umformen von Gleichungen	80
Übungen 9	80
Übungen 10	82
Übungen 11	84
Übungen 12	86
Übungen 13 (Gesamtwiederholung)	88
Kontrolliere dich selber -	
Gleichungen I.....	90
Tipps zu den Übungen	91
PLUS – Aufgaben	94
PLUS zum Knobeln	94
PLUS 1	94
PLUS 2	95
PLUS 3	96
PLUS zum Abwägen	97
PLUS 4	97
PLUS 5	98
PLUS 6	99
PLUS zum Anwenden	100
PLUS 7	100
PLUS 8	101
PLUS 9	102
Weitere Übungen	103
Lösungen zu den Übungen	105
Lösungen zu den Weiteren Übungen	107
Mathematische Fachausdrücke	108
"Rückgängig machen!"	108
"Umformen"	109
"Überschüsse"	110
PLUS - Symbole	112
Anhang	113

Vorwort

„Gleichungen I“ ist ein Projekt zur Einführung in die Gleichungslehre.

Die Zahlenrätsel zu Beginn bilden die Kernidee der Gleichungen. Das Lösen mit „Überschüssen“ ist etwas für Denker und Denkerinnen. Die Meisterschaft zeigt sich am Ende beim systematischen Umformen der Gleichungen.

Ich denke mir eine Zahl ...
Wenn ich zu ihrem Zweifachen
7 addiere, bekomme ich 13.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 7 & = & 13 \\ 2x & = & 6 \\ x & = & 3 \end{array}$$

Dabei werden mathematischen Fähigkeiten *im Verstehen, Lösen und Entwickeln von (Text-)Gleichungen* geschult.

Viele Ideen haben ihre Wurzeln in Arnold Bernhards Buch „Algebra für die siebte und achte Klasse an Waldorfschulen“. Diese wurden in langjähriger Unterrichtspraxis verfeinert, weiterentwickelt und durch die „Zahlenrätsel im Kopfrechnen“ und die ZweiPLUS – Differenzierung ergänzt.

Bei den **Übungen** ist zunächst richtig viel zu rechnen. Jedes Arbeitsblatt ist einem eigenen Themenaspekt gewidmet, der mit didaktischen Hinweisen erläutert wird. Insgesamt werden die Aufgaben auf jeder Seite zunehmend vielfältiger - und schwerer. Jede Seite besteht aus grundlegende und * Stern-Aufgaben. Die PLUS-Aufgaben stehen weiter hinten.

1. Ein **Beispiel** mit vielen wichtigen **Grundaufgaben**

2. Löse immer dieses **Zahlenrätsel**

3. * **Stern - Aufgaben** werden schwerer und anspruchsvoller ...

... die grauen Kreise sind **Tipp's** zum Nachschauen!

„**PLUS-Aufgaben**“ sind anders ...

Einige **Tipp's** und die **Lösungen zu den Übungen** stehen hinten im Buch. Allerdings nicht zu den spannendsten Aufgaben...

„Gleichungen I“ gibt es in zwei Ausgaben:

- Ausgabe B - Schülersausgabe (mit Lösungen zu den Übungen)
- Ausgabe C - Lehrerausgabe (Übungen mit Lösungen und methodisch-didaktische Hinweise zum Unterricht)

Wenn Sie Fehler finden, Anregungen oder Fragen haben, wende Sie sich bitte an mich:

Frank Rothe, email: frank.rothe@utanet.at
Samstr. 49 B, A-5023 Salzburg homepage: www.calculemus.at

Langer Rede kurzer Sinn...

...und nun viel Spaß und Erfolg mit „Gleichungen I“

Frank Rothe

Einleitung

„**Gleichungen I**“ ist für die und aus der **pädagogischen Praxis** entwickelt worden. Es eignet sich sowohl zur Einführung der Gleichungslehre als auch als wiederholende Aufgabensammlung.

Der pädagogische Grundgedanke ist, alle Schüler¹ in ihrem ganz **individuellen Lern- und Entwicklungsprozess** zu unterstützen und zu fördern. Ihre spezifischen mathematischen Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnisse sollen ihrem aktuellen Stand und ihrem Potenzial entsprechend berücksichtigt und (selbst) entwickelt werden.

Die zugrunde liegende **Kernidee** in diesem Lehr- und Lernprozesses basiert auf drei Säulen.

Die erste Säule:

Die erste Säule ist das Lernen in einem **sinn-vollen Zusammenhang**. Die Schüler sollen Gleichungen in einem von ihnen erlebten und erfahrenen d.h. in einem sinn-erfüllten Kontext kennen lernen und lösen können. Hierzu eignen sich besonders einfache, mathematische Zahlenrätsel. Die Welt der Zahlen ist den Schülern der 7. Schulstufe wohlbekannt. Sie kennen diese und können sich in ihr „bewegen“, d. h. rechnen (schriftlich und im Kopf). Zudem ist in dieser Altersstufe rätseln und knobeln überwiegend noch attraktiv und kann bis zu einem „sportlichen Wettstreit“ führen.

Wichtig ist, dass bereits das **Kennenlernen** von Gleichungen durch Verstehen und einen verständnisvollen Umgang geprägt ist. Wenn Schüler in der Oberstufe fragen „Was ist eigentlich eine Gleichung und wozu brauche ich diese überhaupt?“ dann ist oftmals in dieser ersten Kennenlernphase etwas schiefgelaufen.

Als didaktisches Hilfsmittel erweist sich mit zunehmender Vertiefung des Wissens die Berücksichtigung der drei **Bruner'schen Verstehensebenen**² (Darstellungsebenen) als sehr hilfreich. Dem Ausführen von „Handlungen“ (enaktiv) folgt das Strukturieren innerer Bilder (ikonisch) und abschließend der symbolischen Umgang mit Gleichungen (symbolisch). Hierzu finden sich auch passende Schritte in Arnold Bernhards Buch „Algebra“³.

Umgesetzt wird dies durch das Behandeln und Besprechen von **Zahlenrätseln im Kopfrechnen**. Elementare Zahlenrätsel lassen sich naiv durch einfache Zahlenüberlegungen lösen. Werden die Zahlenrätsel „schwieriger“, so hilft es das Zahlenrätsel und dessen Lösungsgang innerlich bildhaft zu strukturieren, um zur Lösung zu gelangen. Ein großer Schritt ist es anschließend, anspruchsvolle Zahlenrätsel in der mathematischen Symbolsprache zu formulieren und durch Umformen (der Symbole) zu lösen.

In dieser Phase ist der „**Welt-Ich-Dialog**“ der Schüler besonders ausgeprägt. Sie müssen das Zahlenrätsel – als sinnvoller (Teil-)Zusammenhang der Welt – in die mathematische Symbolsprache übersetzen. Die Lösung der Gleichung wird dann in diesem Rahmen – innerlich, abs-

¹ Liebe Leser, um die Lesbarkeit des Textes zu erhöhen habe ich jeweils die männliche Schreibform verwendet. Natürlich sind überall beide Geschlechter gleichberechtigt gemeint.

² Bei Bruner findet sich statt des Ausdrucks „Verstehensebene“ die Formulierung „Darstellungsebenen“, „Repräsentationen“ oder „Arten von Wissen“. Mit Blick auf Bruners Wissensverständnis erscheint die Formulierung als „Verstehensebenen“ oder „Verständnisebene“ geeignet und naiv verständlicher in dem hier behandelten Zusammenhang.

³ Bernhard, A. (1991): Algebra für die siebte und achte Klasse an Waldorfschulen, Verlag freies Geistesleben, Stuttgart

trakt – mathematisch abgeleitet. Als Abschluss bedarf diese rechnerische Lösung wieder einer Klärung. Was bedeutet sie nun genau im ursprünglichen Aufgabenkontext?

Der „Welt-Ich-Dialog“ wird weiter unterstützt durch **regelmäßige Zahlenrätsel in Textform**. Eine grundlegende Textaufgabe findet sich auf jedem Übungsblatt. Bei den PLUS-Aufgaben finden sich schwierigere (Text-)Zahlenrätsel und andere Textaufgaben in anschaulichen Zusammenhängen.

Prinzipiell ist das Formulieren eines inneren Zusammenhanges oder Gesetzes in der mathematischen (Symbol-)Schreibweise eine besondere Fähigkeit. Es müssen einzelne Symbole sowie deren Gesamtstruktur verständnisvoll und *willentlich* von den Schüler mit Bedeutung belegt werden. Das gemeinschaftliche Erarbeiten dieser **mathematischen Schreibweise** ist für die Schüler eine große Hilfe.

Die zweite Säule:

Die zweite Säule bilden die umfangreichen Übungen. Hier geht es um das **Üben mathematische Basisfähigkeiten**. Dem Üben kommen unterschiedliche Funktionen zu. Zuvor kennen gelernte Methoden sowie Rechenwege werden in einem zweiten Verständnisschritt verifiziert. Durch Wiederholung und Variation werden die individuellen mathematischen Fähigkeiten automatisiert und vertieft.

Jedes Übungsblatt ist aufbauend einem eigenen Themenaspekt gewidmet, der durch konkrete didaktische Anregungen erläutert wird und wichtige Schritte hervorhebt. Die **Übungen** selber sind in sich stark gegliedert. Ungefähr die erste Hälfte der Übungen ist sehr grundlegend und wiederholend gehalten (Grundlegend). Die jeweils zweite Hälfte ist rechnerisch anspruchsvoller und es bedarf mathematischer Vielfalt beim Lösen (Erweiternd).

Mit den **Weiteren Übungen** als Hausaufgaben wird der Einschleifprozess der angelegten mathematischen Fähigkeiten im Umgang mit den Gleichungen weiter unterstützt.

Die dritte Säule:

Die dritte Säule von Gleichungen I bildet die **Differenzierung** in Form des ZweiPLUS-Unterrichtsmodells.

Im Bereich der unmittelbaren mathematischen Rechenmethoden erfolgt die Differenzierung durch die bereits erwähnte Gliederung in grundlegende und erweiternde Aufgaben bei den „Übungen“. So werden die Schüler in ihrem **individuellen mathematischen Lernpotenzial** angesprochen und gefördert.

Die erweiternden Aufgaben werden immer anspruchsvoller. Manchmal sind andere mathematische Vorkenntnisse erforderlich, manchmal geht es um einen einfachen Rechentrick, der die Aufgabe viel einfacher werden lässt. Damit die Schüler auch auf diesem höheren Niveau in **ihrem Arbeits- und Lernfluss** arbeiten können (flow) gibt es zusätzlich einige Tipps weiter hinten im Heft.

In weiterer Folge kommen die Schüler zu den PLUS-Aufgaben. Bei diesen geht es verstärkt um das vertiefende Verstehen und ideenreiche Lösen von (Text-)Gleichungen. Motivation, Engagement und Interessen sind gefragt. **Kreativer Umgang und mathematische Ideenvielfalt** werden immer wichtiger. Gleichzeitig gibt es auch immer einige Aufgaben, welche zusätzliche Fähigkeiten fördern – wie z. B. mehr das räumliche Vorstellungsvermögen.

Mit zunehmender Differenzierung und Selbstständigkeit der Schüler verändert sich die **Lehrerrolle** vom Führen zum Zuhören (s. S. 17).

Die Theorie der ZweiPLUS-Differenzierung ist sehr vielseitig in der praktischen Umsetzung. Da die einzelnen Elemente (s. S. 13) sehr flexible handhabbar sind, kann ZweiPLUS leicht an bereits bestehende Unterrichtsformen und -gewohnheiten angepasst werden.

Eine **wesentliche Voraussetzung** ist allerdings immer die ausreichend Berücksichtigung der **Schüleraktivität**. 50 bis 70% der Unterrichtszeit sollen den Schülern für individuelle Lernprozesse (d.h. für das selbstständige Lernen und Arbeiten) zur Verfügung stehen.

Die folgende Grafik veranschaulicht das Konzept mit seinen drei Säulen. Ihr Zusammenspiel ermöglicht den Schüler einen intensiven Dialog zwischen der äußeren mathematischen Welt und inneren individuellen (Denk- und Vorstellungs-)Fähigkeiten.

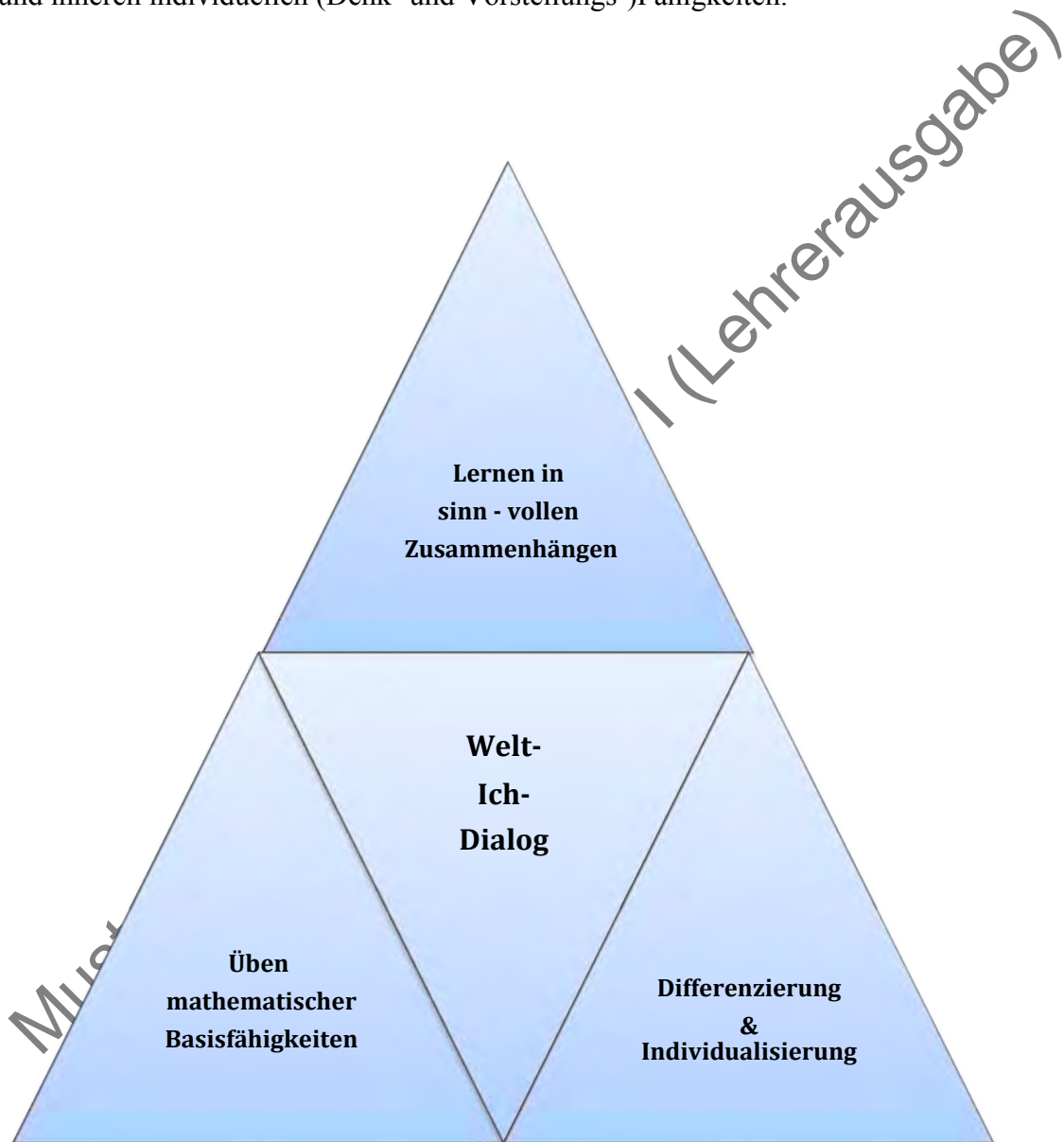


Abbildung 1: Übersicht zum Konzept von Gleichungen I

Übersichten zu den Themen und Lernschritten

Hier folgen einige Übersichten zu den Themen und Lernschritten im Gesamtkonzept. Die Übersichten unterscheiden nach den Rechenverfahren (=Lösen von Gleichungen) sowie den Hintergründen und Zusammenhängen (=Verstehen von Gleichungen). Die ersten Tabellen sind (grobe) Übersichten, um einen ersten Gesamteindruck zu gewinnen. Weiter hinten finden sich genauere Detailübersichten (s. S. 58 ff.), die zudem als Vorschlag eine dreiwöchige Projektdauer (Epoche) berücksichtigen. Die einzelnen Lernschritte orientieren sich an den „Übungen“, entsprechen jeweils einer Lerneinheit. Sie sind zu größeren Bereichen zusammengefasst.

Gesamtübersicht zum „LÖSEN von Gleichungen“ (Rechenverfahren)	
I. Vom Zahlenrätsel zur Gleichung (Gleichungen lösen KÖNNEN)	
Übungen 1	Zahlenrätsel – einführend (Zahlenrätsel in Worten und als Gleichung)
Übungen 2	Zahlenrätsel - fortsetzend (... aber nur noch in Gedanken formulieren und lösen)
Übungen 3	Gleichungen - einführend (Struktur der Gleichung entspricht derjenigen der Zahlenrätsel, Lösen durch schrittweises Rückgängig machen, gegenteilige Rechenoperationen)
Übungen 4	Gleichungen - wiederholend (wie in Übung 3)
Wiederholungs- übungen (1-4)	
II. Gleichungen mit Überschuss lösen! (Im Bild sein!)	
Übungen 5	Lösen mittels Überschuss – einführend (Was ist ein Überschuss?)
Übungen 6	Lösen mittels Überschuss - fortsetzend (erst zusammenfassen, dann ...)
Übungen 7	Lösen mittels Überschuss - vertiefend (Überschüsse mit positiven und negativen Zahlen)
Übungen 8	Überschüsse und Umformen ... der Übergang (zwei Denkweisen aufgreifen und in Beziehung setzen)
III. Das systematische Umformen v. Gleichungen (Vom vorstellenden zum abstrakten Umformen)	
Übungen 9 (Fr)	Umformen – wiederholen (Auf beiden Seiten dasselbe rechnen, gegenteilige Rechenoperation, veranschaulichen am Bild der Waage)
Übungen 10 (Mo)	Umformen - fortsetzend (Umformen und dabei erkennen wo „x“ steht?)
Übungen 11	Umformen – vertiefend I (Umformen mit Klammern)
Übungen 12	Umformen – vertiefend II (Umformen mit Ausgleich(-en))
Übungen 13	Gesamtwiederholung
Abschlussübungen	

Abbildung 21: Gesamtübersicht zum „LÖSEN von Gleichungen“

Gesamtübersicht zum „VERSTEHEN von Gleichungen“ (Zusammenhänge)

I. Vom Zahlenrätsel zur Gleichung (Gleichungen lösen KÖNNEN)

Übungen 1	Elementare Zahlenrätsel - einführend (einfache Zahlenrätsel im Kopf naiv lösen)
Übungen 2	Elementare Zahlenrätsel – wiederholend (wie bei Übungen 1)
„Übungen 3“	Zwei-Zahlen-Rätsel – Anfangsstufe - einführend (ein Gefühl für die Lösung entwickeln, „mathematische Schreibweise“ einführen)
„Übungen 4“	Elementare Zahlenrätsel - vertiefend (längere Zahlenrätsel im Kopf lösen) Zwei-Zahlen-Rätsel – Anfangsstufe - fortsetzen (schwierigere Lösungen, mathematische Schreibweise üben)
„Wiederholungs- übungen (1-4)“	

II. Gleichungen mit Überschuss lösen! (Im Bild sein!)

„Übungen 5“	-
„Übungen 6“	Zwei-Zahlen-Rätsel – Bildstufe – einführend (bildhaft, Ludwig-Mona-Erklärungsaufgabe)
„Übungen 7“	Zwei-Zahlen-Rätsel – Bildstufe – fortsetzen (Ludwig-Mona-Erklärungsaufgabe fortsetzen, Gleichung für die kleine Zahl)
„Übungen 8“	Zwei-Zahlen-Rätsel – Bildstufe – wiederholen (Nadine-Erklärungsaufgabe, Gleichung für die kleine Zahl im Bild sehen)

III. Das systematische Umformen v. Gleichungen (Vom vorstellenden zum abstrakten Umformen)

„Übungen 9“ (Fr)	Zwei-Zahlen-Rätsel – Bildstufe – vertiefen (Nadine-Erklärungsaufgabe verallgemeinern, bildhaft, stärkere Musterbildung)
„Übungen 10“ (Mo)	Zwei-Zahlen-Rätsel – Symbolstufe – einführend (Gefühl für zwei unterschiedliche Rechenweg – den bildhaften und den symbolischen – erleben)
„Übungen 11“	Zwei-Zahlen-Rätsel – Symbolstufe – fortsetzen (den neuen, symbolischen Rechenweg (Umformen) anwenden)
„Übungen 12“	Zwei-Zahlen-Rätsel – Symbolstufe – vertiefend (den neuen, symbolischen Rechenweg (Umformen) übertragen auf den neuen Taschengeld-Kontext)

Übungen 13 ...
(Gesamtwiederholung)

Abschlussübungen

Abbildung 22: Gesamtübersicht zum "VERSTEHEN von Gleichungen"

Die „Übungen“ sind in Anführungszeichen gesetzt, weil der Hinweis nur zeitlichen Charakter hat. Der eigentliche Verständnisaspekt findet während der *Zahlenrätsel im Kopfrechnen* statt.

Die Tabelle auf der folgenden Seite ist eine vergleichende Zusammenfassung der beiden vorherigen. Hier lässt sich das Zusammenspiel zwischen den Themen beim LÖSEN und den Themen beim VERSTEHEN von Gleichungen im groben verfolgen.

Zu jedem Übungsblatt gibt es erprobte didaktische Tipps und Anregungen direkt daneben (s. n. S.)

Hinweise & Anregungen 1

Ziele: Zahlenrätsel - einführend

- Zusammenhänge: * Gleichungen entstehen im sinn-erfüllten Kontext der Zahlenrätsel
* Zahlenrätsel in Worten und als Gleichung

- Rechenverfahren: * Elementare Zahlenrätsel im Kopfrechnen naiv und spontan lösen
* Der Lösungsweg beim Kopfrechnen wird analog (als Gleichung) mathematisch verschriftlicht und angewendet
* Probe besprechen

Kopfrechnen/Zahlenrätsel

1. Kurze Zahlenrätsel z.B. $x + 6 = 10$, $x \cdot 2 = 20$...
2. Normale Zahlenrätsel z.B. $2x + 3 = 11$...

Besondere Tafelaufgaben:

1. $2x + 11 = 31$ ohne Probe
2. $8x - 21 = 35$ mit Probe

Anmerkungen zum Kopfrechnen:

1. Beginne mit ganz einfach kurzen Zahlenrätseln ($x + 6 = 10$, $x - 4 = 10$, $2 \cdot x = 12$, $x : 2 = 4$). „Ich denke mir eine Zahl, aber ich verrate sie euch nicht. Ihr müsst sie herausbekommen. Wenn ich zu meiner Zahl 6 addiere, bekomme ich 10.“
2. Setze fort mit normalen Zahlenrätseln wie $2x + 3 = 11$ oder $6x - 2 = 10$. Beachte: mit Minus ist schwerer als mit plus!
3. Zur **Formulierung der Zahlenrätsel**: s. *unbedingt* A. Bernhard „Algebra“, S.107ff
4. Übe *unbedingt* selber das Stellen der Zahlenrätsel. Du wirst deine Erfahrungen machen ...
5. Wichtig bei diesen ersten Zahlenrätseln ist, in einem kleinen Zahlenraum zu bleiben, wirklich bekannte Rechnungen zu wählen, damit die Schüler diese Rätsel alle **gut lösen können**.

Anmerkungen zu den (besonderen) Tafelaufgaben:

6. Wenn die Zahlenrätsel im Kopfrechnen schwerer werden entsteht automatisch das Bedürfnis des Aufschreibens.
7. Zu Tafelaufgabe 2: Während du das Zahlenrätsel in Worten formulierst, schreibst du an der Tafel die einzelnen Schritte mit. Die ersten drei Zeilen sind das Rätsel. Die beiden folgenden (symmetrisch) die Lösung. Betone die Schritte und das **schrittweise Lösen!** (s. a. Internetfotos).
Mache bei dieser Aufgabe die **Probe** (vgl. *unbedingt* S. 45).
8. **Zentral ist die Fähigkeit** Zahlenrätsel in Worten und als Gleichung zu „formulieren“.
9. In den ersten beiden Tagen bin ich selber mit der **Schreibweise** nicht sehr streng. Es geht mehr um die tatsächlichen Denkprozesse als um die korrekte mathematische Schreibweise. Verboten ist nur, das Ergebnis direkt hinzuschreiben. Ab dem dritten Tag wird das anders ...
10. **Zur Differenzierung**: Das Ziel ist natürlich, das jeder Schüler seinen individuellen Lernweg mit seinem eigenen Lernniveau gehen kann. Nur, wie findet er sein momentanes Lernniveau? Ein Vorschlag: Lasse die Schüler am **ersten Tag** alles d.h. undifferenziert rechnen. So lernen sie die Materien näher kennen. Am **zweiten Tag** noch mal alles rechnen lassen, aber sage den Schnelleren, sie sollen schon mal auf die Zeit achten, wie schnell - und dabei richtig - sie rechnen. Dann können sie am **dritten Tag** schon etwas realistisch sich selber einschätzen (s. grauer Kasten „Differenzierung“).
11. Ein Hinweis an die Schüler: „Der Platz zum Schreiben im Heft ist knapp – aber es geht. Jedenfalls bitte erst mal mit Bleistift versuchen.“
12. Zu Übungen 1, Nr. 1: Die Probe hat hier am ersten Tag eher einen „Trainingscharakter“ im Sinne von „So geht es!“ Das sollten die Schüler wissen. Zum Sinn der Probe lies auf S. 45 nach.
13. Zu Übungen 1, Nr. 5 c): „...von dieser zuerst 2 subtrahiere ...“ d.h. $x - 2$ „... und anschließend (alles) mit 5 multiplizieren ...“ d.h. $(x - 2) \cdot 5$

x	=	
$8 \cdot x$	=	
$8 \cdot x - 21$	=	35
$8 \cdot x$	=	56
x	=	7

Differenzierung

(s. Anmerkung 10)

GL EW

...

PLUS

- Zeit: -
- für: -
- s. S. 14 u. 25

Übungen 1

1. Schreibe das Zahlenrätsel als Gleichung. Löse es (schrittweise). Ich denke mir eine Zahl, ...

Beispiel

a) wenn ich zu ihrem Zweifachen 7 addiere, bekomme ich 13

$$2x + 7 = 13 \quad \text{Gleichung!}$$

$$2x = 6$$

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

Probe: $2 \cdot 3 + 7 = 13$
 $6 + 7 = 13$

b) wenn ich zu ihrem Zweifachen 11 addiere, bekomme ich 21.

$$\dots \dots \dots = \dots$$

$$=$$

$$=$$

Probe:

c) wenn ich zu ihrem Dreifachen 6 addiere, bekomme ich 27

Probe:

d) wenn ich von ihrem Dreifachen, 5 subtrahiere, bekomme ich 19.

e) wenn ich von ihrem Fünffachen 4 subtrahiere, bekomme ich 26.

f) wenn ich von ihrem Achtfachen 3 subtrahiere, bekomme ich 29.

Lehrerausgabe - Bitte nicht kopieren!

2. Notiere das Zahlenrätsel. Löse es anschließend (schrittweise)! Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich ...

b) ...

c) ...

$$5x + 7 = 22$$

$$2x - 3 = 19$$

$$7x - 2 = 5$$

3.* Gemischte Zahlenrätsel! Schreibe sie als Gleichung. Löse sie! Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich zu ihrem Neunfachen 14 addiere, bekomme ich 41.

b) wenn ich zu dieser 7 addiere, bekomme ich 13.

c) wenn ich von dieser 4 subtrahiere, erhalte ich 8.

4.* Gemischte Zahlenrätsel. Notiere das Zahlenrätsel. Löse es! Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich...

b) ...

c) ...

$$8x + 5 = 53$$

$$x \cdot 9 = 63$$

$$7x - 13 = 29$$

5.** Schreibe das Zahlenrätsel als Gleichung. Löse es (schrittweise). PROBE! Ich denke mir eine Zahl, ...

a) wenn ich zu ihrem Achtfachen 191 addiere, ergibt sich 999.

b) wenn ich von Ihrem Vierzehnfachen 17,5 subtrahiere, bekommt man 38,5.

c) wenn ich von dieser zuerst 2 subtrahiere und anschließend - alles - mit 5 multipliziere, erhalte ich 35.

Hinweise & Anregungen 5

Ziele: Lösen mittels Überschuss - einführend

Zusammenhänge: * Der Begriff des Überschuss

Rechenverfahren: * Gleichungen lösen mittels Überschuss
 * Der x-Überschuss kann auf der linken oder rechten Seite der Gleichung stehen
 * Nur mit positiven Zahlen

Kopfrechnen/Zahlenrätsel Tafelaufgaben mit Beispiel:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. Kurze & normale ZR | 1. $9x = 8x + 5$ |
| 2. erweiterte ZR | 2. $6x + 1 = 2x + 13$ |
| | 3. $6x + 18 = 9x + 3$ |

↓	$6x$	+	1	=	$2x$	+	↓	13		Üb.
	$4x$			=				12		4
	x			=	3					

Anmerkungen zum Kopfrechnen:

1. Kurze und normale Zahlenrätsel. Erweiterte Zahlenrätsel halbschriftlich.
2. Kopfrechnen heute nur kurz zum Aufwärmen! Du brauchst die Zeit dringend für die Tafelaufgaben.

Anmerkungen zu den (besonderen) Tafelaufgaben:

1. **Vorbemerkung:** Die *Technik des Rückgängigmachens* führt letztlich über zum *Umformen* von Gleichungen. Zwischen der konkreten Kopfrechnen-Tätigkeit beim Ersteren und dem *symbolisch abstrakten Mechanismus* beim Letzteren bieten sich als Verständnisbrücke die Überschüsse an. Überschüsse gehen aus von dem Gleichviel (=) zweier Rechenwege (rechts und links) und fragen nach dem - was sowieso rechts und links gleichviel ist und besonders nach dem - was (jeweils) MEHR ist.
2. Zu Tafelaufgabe 1: (Einige) Schüler/innen sehen direkt, das $x=5$ ist. „Kannst du erklären, wie du zu deinem Ergebnis gekommen bist?“
3. Zu Tafelaufgabe 2. Du kannst in folgenden Schritten vorgehen.
 - Lasse die Gleichung als Zahlenrätsel formulieren: „Wenn ich zum Sechsfachen meiner Zahl 1 addiere, bekomme ich gleichviel, wie wenn ich zu ihrem Zweifachen 13 addiere.“
 - Wichtig: „Ah, das sind zwei verschiedene Rechenwege. Aber egal wie ich rechne jedes Mal kommt gleichviel heraus.“
 - Schauen wir die Rechenwege genauer an. Woraus bestehen sie? Jeweils aus den Vielfachen der gedachten Zahl (x) und noch aus (bestimmten) Zahlen. Und alles muss dann gleichviel (oder gleichgroß) sein.
 - „Wie sieht das mit dem „Gleichviel“ der Vielfachen (x) in beiden Rechenwegen (rechts und links) aus? Links sind 6x (oder das Sechsfache der gedachten Zahl), rechts sind 2x. Wo sind **MEHR**? Links (Pfeil links über die 6x zeichnen)! Wie viel x sind links mehr? 4x! Richtig! 2x sind links und rechts ja eh gleich viel. Aber links ist tatsächlich ein **Überschuss von 4x**. Das schreiben wir mal hin ... (s. Internetfoto).“
 - „Wie sieht das mit dem „Gleichviel“ der (einfachen) Zahlen in beiden Rechenwegen (rechts und links) aus? Links steht +1 und rechts +13. Wo sind **MEHR**? Rechts (Pfeil rechts über die 13 einzeichnen)! Um wie viel ist die Zahl rechts mehr (größer) als die linke? Um 12! Richtig! Die +1 links und eine 1 von der 13 rechts sind eh gleichviel. Aber die 12 von der 13 rechts ist echt mehr. Rechts ist tatsächlich ein **Überschuss bei den (einfachen) Zahlen von 12**. Das schreiben wir mal hin ...“
 - Vieles war nun auf beiden Seiten gleichviel (oder gleichgroß). Aber links war ein x-Überschuss von 4x und rechts ein Zahlen-Überschuss von 12. Und weil die beiden gesamten Rechenwege gleichviel ergeben, müssen nun die Überschüsse **gleichviel ergeben** (... denn das andere ist ja schon gleichgroß)!
4. Die **Pfeile** sollen bildhaft betonen auf welcher Seite der (jeweilige) Überschuss – wo es jeweils MEHR - ist. Dadurch schreiben die Schüler leichter z.B. den x-Überschuss (hier) richtig auf die linke Seite ...
5. Schreibe unbedingt die Überschüsse als **Rechenvorhaben** an: „Überschuss“ oder kurz „Üb.“ Das ist für die Schüler später eine unsagbare Erleichterung und gleichzeitig ein Hinweis darauf, wie an dieser Stelle gedacht werden soll.
6. vgl. A. Bernhard, S. 113 ff.
7. Zu Übungen 5, Nr. 5: Wenn die Schüler eigene Überschussaufgaben erfinden, wird es wieder richtig spannend. Ein Blick in die mathematische Zukunft entsteht. Du und die Schüler werden überrascht sein (s. Internetfotos).

Differenzierung

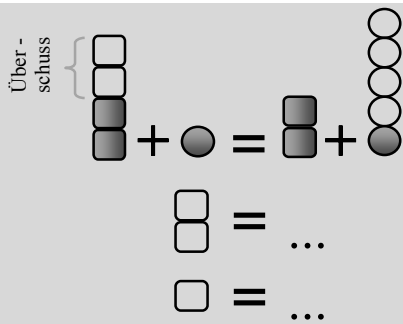
GL	EW
Nr. 1	Nr. 1
Nr. 2	Beispiel,
Nr. 3	b, e, h, k
...	Nr. 2
...	Nr. 3
	Nr. 4
	Nr. 5

PLUS

- Zeit: -
- für: -

Übungen 5

Beispiel mit Bild



$$4x + 1 = 2x + 5$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

1. Löse mit Überschüssen.

a) $7x + 6 = 3x + 26$

d) $3x + 16 = 8x + 1$

b) $5x + 35 = 9x + 7$

c) $2x + 14 = 11x + 5$

e) $16x + 2 = 13x + 23$

f) $15x + 5 = 3x + 29$

g) $27x + 7 = 12x + 52$

Lehrerausgabe - Bitte nicht kopieren!

h) $5x + 46 = 12x + 4$

i) $2x + 61 = 14x + 1$

j) $30x + 36 = 33x + 3$

k) $8x + 2 = 9x$

l) $12x = 11x + 4$

2. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich zu ihrem Elffachen 6 addiere, bekomme ich gleich viel wie wenn ich zu ihrem Sechsfachen 26 addiere.

3. Löse die Gleichungen mittels Überschüssen. PROBE!

a) $8x + 12 = 3x + 27$

b) $11x + 5 = 7x + 45$

4.* Es wird anspruchsvoller ... Löse die Gleichungen mittels Überschüssen.

15 a) $8x + 15 - 2 = 6x + 21$

b) $5 + 4x + 3 = 10x + 2$

c) $17x + 10 + 3 = 30 + 14x - 2$

d) $40,5 + 3,3x + 1,7 = 7,8x + 7,2 + 2,5x$

e) ** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1,5x = \frac{115}{10} + x$

f) ** $7x - 2 = 3x + 6$

Probe:
(von f)

*

5. Überlege dir eine leichte und eine schwere Gleichung, die man mit Überschüssen lösen kann. Schreibe die Gleichungen (für die anderen) an die Tafel. Löse die Gleichungen ...