Ergänzungen zur Algebra

von Frank Rothe

(ist erschienen in Lehrerrundbrief Nr. 74 März 2002, S. 33 ff; Mitteilungsblatt des Bundes der Freien Waldorfschulen, Heidehofstraße 32, D-70184 Stuttgart)

In seinem Buch “Algebra” s. [1] schreibt Bernhard über die erste binomische Formel (s.S. 24 f) :

“ [...] $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ [...] Die Formel kann an vielen konkreten Beispielen eingeübt werden: [...] $19^2 = (10+9)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 9 + 9^2 = 100 + 180 + 81 = 361$ Wenn Geläufigkeit erreicht ist, kann die Rechnung kürzer geschrieben werden: [...]

	Resultat	Zuwachs
$23^2 = (20+3)^2 = 400 + 120 + 9 =$	529	
		47
$24^2 = (20+4)^2 = 400 + 160 + 16 =$	576	
		49
$25^2 = (20+5)^2 = 400 + 200 + 25 =$	625	
		51
$26^2 = (20+6)^2 = 400 + 240 + 36 =$	676	
		53
$27^2 = (20+7)^2 = 400 + 280 + 49 =$	729	

[...] Die Schüler entdecken, daß die Zeile [...] $25^2 = 625$ die Rolle einer Symmetrieachse spielt: über und unter ihr kommen die gleichen Endzahlen 76 , 29,...vor [Anm.: das sind die beiden Endziffern der Quadratzahl]. Hat die Symmetrie einen Grund? Wir entdecken ihn. [...] ”

...Man entdeckt ihn, wenn man bei Bernhard auf Seite 24 und 25 weiterliest. Das sollte auch jeder Lehrer tun, der mit diesen Aufgaben arbeiten möchte. Wichtig ist zunächst der Begriff des Zuwachses , das Anwachsen (genauer formuliert der Unterschied) einer Quadratzahl zur nächsten Quadratzahl und der Begriff der Symmetrie. Eine (Quadrat-) Zahl - nämlich die 25^2 fungiert als Spiegelachse, als Spiegelungszahl, an der sich die letzten beiden Endziffern der angrenzenden Quadratzahlen spiegeln.

Die nachstehenden Aufgaben sind als Anregungen für die Algebra der 7. und 8. Klasse zu verstehen. Die Dualzahlen geben ein Ausblick, wie das Thema in der 9. Klasse knapp fortgesetzt werden könnte.

Zuerst können in der 7. Klasse Zuwachs und Symmetrie rechnerisch mit der ersten binomischen Formel behandelt werden. Das Erlebnis der tieferen Zusammenhänge geschieht durch den Blick auf die Gesetzmäßigkeiten beim Zuwachs selber.
Alsdann können während der 8. Klasse die Zusammenhänge bei der Symmetrie aufgegriffen und mit der ersten und der zweiten binomischen Formel vergleichend untersucht werden. So entsteht eine algebraische Betrachtungsweise auf höherem Niveau.
Und in der 9. Klasse können die bekannten Symmetriezusammenhänge auf die Dualzahlen übertragen werden. “Im Neuen das Alter erkennen” , “Das Alte mit neuen Augen sehen” , nicht “Anderes lernen” sondern “anders lernen”.

Die Aufgaben selber stellen erhöhte Ansprüche an die Schüler. Sie sind gedacht als Knobelaufgabe für die Schnelleren und Begabteren, die mit dem normalen Klassenstoff oftmals unterfordert sind. Hier bedarf der Klassenlehrer zusätzlichen Materiales, um auch diesen Kindern in ihrem Lernwillen und ihrer individuellen Entwicklung gerecht zu werden.

In dem betrachten von Zuwachs und den dargestellten Symmetrien bzw. Spiegelungszahlen erleben die Schüler tiefere Zusammenhänge zwischen den Zahlen. Ein Gefühl - mehr eine gefühlsmäßige Einschätzung - für die Richtigkeit der Rechnung entsteht.
Einige Aufgaben heben bewußt den Unterschied zwischen “Suche weitere Beispielzahlen...” und “Finde alle Zahlen...” hervor. Dies schärft den Blick für “Ich sehe es...aber sehe ich auch wirklich alles”.

Ferner gehen die Aufgaben teils von dem reinen Kennen von Zusammenhängen über zu dem Begründen derselben. Hier liegt der Ansatz zu einer bewußt-tieferen Einsicht in die Richtigkeit der Zusammenhänge. Doch darf der Lehrer an dieser Stelle nicht übertreiben. Es muß immer alters- bzw. für die Begabteren leistungsgemäß bleiben.

Was soll der Klassenlehrer mit diesen Aufgaben machen? Selber rechnen! Unbedingt als erstes selber rechnen, damit er genau weiß, was er seinen (guten) Schülern zumutet. Selber rechnen...und zwar alles schriftlich bzw. im Kopf (mit anderen Worten: ohne Taschenrechnen)!

Und nun...ran an die Arbeit!

Aufgaben “Zuwachs”

1. **a)** Berechne die Quadratzahlen (Resultat)! Kürze ab! Ergänze den Zuwachs.[1]

Resultat Zuwachs

$1^2 = \ (\ 0+1)^2 = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots =$

$11^2 = \ (10+1)^2 =$

$21^2 =$

$31^2 =$

$41^2 =$

$51^2 =$

***b)** Wie groß müßte der Zuwachs von 81^2 zu 91^2 sein?

****c)** Wie groß müßte der Zuwachs von 211^2 zu 221^2 sein?

2. **a)** Es gibt etwas zu entdecken. Die Quadratzahlen samt dem jeweiligen Zuwachs (dritte Spalte) wurden berechnet. Die Zahlen 2 und 4 mit Ihren Zuwächsen sind hervorgehoben. Kannst du an der Zahl schon ablesen, wie groß der entsprechende Zuwachs sein muß? Überprüfe deine Vermutung an den anderen Beispielen.

	Zuwachs
$1^2 = 1$	
	3
$\mathbf{2}^2 = 4$	
	5
$3^2 = 9$	
	7
$\mathbf{4}^2 = 16$	
	9
$5^2 = 25$	
	11
$6^2 = 36$	

b) Wie groß müßte der Zuwachsen von 253^2 (nach 254^2) sein?

c) Du weißt leicht wie die Quadratzahl von 30 lautet. Wie lautet der Zuwachs von 30^2 (nach 31^2) und wie groß ist somit 31^2.

[1] vgl. F. Rothe “Algebra I” , S. 29

Aufgaben “Symmetrie”

3. Berechne die Quadratzahlen mit Hilfe der ersten binomischen Formel. Was fällt auf? Achte auf die Endziffer(n) der Quadratzahlen. Welche Symmetrie liegt vor? An welcher Zahl spiegelt es sich? Was spiegelt sich genau?

a) $47^2 = (40 + 7)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots =$

$48^2 =$

$49^2 =$

$50^2 =$

$51^2 =$

$52^2 =$

$53^2 =$

b) Schreibe untereinander und rechne genau wie bei a) .

97^2 , 98^2 , 99^2 , 100^2 , 101^2 , 102^2 , 103^2

4. **a)** Suche nach weiteren Quadratzahlen in der gleichen Weise wie die 100^2 als Spiegelungszahlen (Spiegelachse) auftreten. “In der gleichen Weise wie die 100^2 ” heißt dabei: es sollen sich jeweils die letzten beiden Endziffer der (anderen) Quadratzahlen an der Spiegelungszahl spiegeln.

****b)** Finde <u>alle</u> Zahlen die in gleicher Weise wie bei der 100^2 als Spiegelungszahl dienen. Wie lautet von diesen die kleinste Zahl, bei der dieses Symmetrie auftritt? Zusatz: Begründe deine Antwort. **Tip[2]:** 25^2 ist eine Spiegelungszahl. Berechne für 24^2, 25^2, 26^2 mit der ersten bzw. zweiten binomischen Formel...

$$24^2 = (25-1)^2 = 625 - 2\cdot 25\cdot 1 + 1 = \ldots$$
$$25^2 = \quad 625$$
$$26^2 = (25+1)^2 = 625 + 2\cdot 25\cdot 1 + 1 = \ldots$$

Das erste und das dritte Ergebnis besteht jeweils aus drei Summanden. Betrachte die Summanden eingehend. Wie groß ist der Unterschied zwischen dem ersten und dritten Ergebnis? Stelle dir jetzt vor, du hättest statt der 25 irgendeine andere Spiegelungszahl , nennen wir sie einfach a . Wie sähen die Rechnungen dann aus?[3]

---

[2] Der Lehrer muß vorsichtig sein mit den Tips. Zu viele Tips machen die Aufgaben zu leicht und die Schnelleren kommen wieder nicht auf ihre Kosten. Wirklich begabte Kinder lieben es überhaupt ihre eigenen Wege zu finden. Gezielte Frageketten sind in einem solchen Fall unangebracht.

[3] Brauchst du noch mehr Tips? ...Berechne die einzelnen Ergebnisse indem du die drei Summanden addierst. Wann bleiben beim (schriftlichen) Addieren die hinteren beiden Ziffern unverändert.

5. **a)** Suche Quadratzahlen, die Spiegelungszahlen bezüglich der letzten drei Endziffern sind. (Tip: vgl. mit 10^2 , 100^2 , ...)

***b)** Kannst du jetzt direkt eine Quadratzahl, die eine Spiegelachse bzgl. der letzten neun Endziffern bildet, angeben?

****c)** Wenn du (glücklich) bishierher gekommen bist kennst du Spiegelungszahlen für die letzten 2 , 3, (4?), ... , 9 Endziffern. Nenne Spiegelungszahlen für eine beliebige Anzahl von Endziffern. Formuliere deine Gesetzmäßigkeit in einem Satz.

****6.** **a)** Berechne die Quadratzahlen! Spiegelungszahl? Wieviele Endziffern spiegeln sich jeweils?[4]

$248^2 = (240+8)^2 = ... + ... + ... =$	Tip: $240^2 =$
$249^2 = (240+9)^2 = ... + ... + ... =$	$240 \cdot 240 =$
$250^2 = (250+0)^2 = ... + ... + ... =$	$24 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 10 =$
$251^2 = (250+1)^2 = ... + ... + ... =$	$24 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 =$
$252^2 = (250+2)^2 = ... + ... + ... =$	$576 \cdot 100 = 57600$

b) Welchem früheren Beispiel einer Spiegelungszahl - nur mit weniger Endziffern - ähnelt dieses Beispiel.

****7.** Finde <u>alle</u> Quadratzahlen die eine Spiegelachse bzgl. der letzten drei Endziffern bilden. Wie heißt die kleinste Zahl?

****8.** Finde <u>alle</u> Quadratzahlen die eine Spiegelachse bzgl. einer beliebig vorgegebenen Anzahl von Endziffern bilden. Wie heißt die kleinste Zahl?

9. Vorgegeben sind die Zahlen von 1 bis 14. Schreibe diese untereinander und berechne jeweils ihre Quadratzahlen. Achte auf die Endziffer(n)! Welche Symmetrie liegt vor? An welcher Quadratzahl spiegelt es sich? Was spiegelt sich genau?

10. **a)** Suche nach weiteren Quadratzahlen, die in der gleichen Weise wie bei Nr. 9 als Spiegelungszahlen (Spiegelachse) auftreten.

****b)** Finde <u>alle</u> Zahlen die in gleicher Weise wie bei Nr. 9 als Spiegelungszahl dienen. Zusatz: Begründe deine Antwort.

---

[4] vgl. F. Rothe “Algebra I” , S. 29

Aufgaben “Symmetrie bei Dualzahlen”

*****11.** Schreibe die ersten zehn Zahlen untereinander (=erste Spalte). Rechne sie daneben in das Dualzahlensystem um (=zweite Spalte). Berechne jetzt die Quadratzahlen der Dualzahlen (=dritte Spalte). Betrachte diese Quadratzahlen (die jetzt natürlich als Dualzahlen geschrieben sind, d.h. sie bilden jeweils eine Ziffernfolge, die nur aus Nullern und Einsern bestehen) .

a) Welche Dualzahl bzw. deren Quadratzahl ist eine Spiegelungszahl bzgl. der drei letzten Endziffern? Begründe deine Antwort!

b) Welche Dualzahl bzw. deren Quadratzahl ist eine Spiegelungszahl bzgl. der vier letzten Endziffern? Begründe deine Antwort!

c) Welche Dualzahl bzw. deren Quadratzahl ist eine Spiegelungszahl bzgl. der zwei letzten Endziffern? Begründe deine Antwort!

d) Warum ist die Frage:”Welche Dualzahl bzw. deren Quadratzahl ist eine Spiegelungszahl bzgl. der letzten Endziffer?” nicht besonders interessant, wenn du bereits Aufgabenteil c) beantwortet hast? Begründe deine Antwort!

Tip: vgl. den Tip von Nr. 4 b) , mache dir klar: Durch welchen Summanden entsteht der Unterschiede zwischen einer Quadratzahl vor und einer Quadratzahl hinter der Spiegelungszahl? Wie groß wäre der Unterschied? <u>Denke gleichzeitig</u> im Dezimal- und Dualzahlensystem!

Literatur:

[1] Arnold Bernhard, “ALGEBRA für die siebte und achte Klasse an Waldorfschulen”, Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben, 1991

[2] Frank Rothe, “Algebra I”, Salzburg: im Selbstverlag, 2001
(Samstr. 49 B , A-5023 Salzburg, Tel.=Fax: 0043/662/665643,
e-mail: frank.rothe@utanet.at , homepage: frank.rothe.web.ag)

Ergänzungen zur Algebra

Lösungen

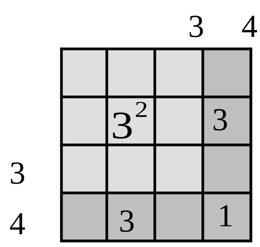
Lösungen “Zuwachs”

1. **a)** Resultat: $1^2 = 1$ $11^2 = 121$ $21^2 = 441$ $31^2 = 961$ $41^2 = 1681$ $51^2 = 2601$
Zuwachs: 120 320 520 720 920

***b)** 1720

****c)** alle Zahlen setzen sich aus einer Zehnerziffer n gefolgt von der Eins zusammen , die Zahl kann symbolisch als “n1” geschrieben werden; $Zuwachs = 120 + (n-1)\cdot 200$, es handelt sich bei dem Zuwachs somit um den Zuwachs **zur** dargestellten Quadratzahl mit der Zehnerziffer n ; für den Zuwachs zu 91^2 war n = 9 und der Zuwachs somit $Zuwachs = 120 + (9-1)\cdot 200 = 1720$; für den Zuwachs zu 221^2 ist die “Zahnerzahl” n = 22 und somit $Zuwachs = 120 + (22-1)\cdot 200 = 4320$

2. **a)** Der Zuwachs von einer Quadratzahl zur nächsten ergibt sich, wenn man die Zahl (erste Spalte) verdoppelt und noch Eins hinzufügt. Steht a für die Zahl und z für den entsprechenden Zuwachs zur nächsten Quadratzahl , läßt sich das so aufschreiben:
$2a + 1 = z$, z.B. für 3 ist $2\cdot 3 + 1 = 7$ oder für 4 ist $2\cdot 4 + 1 = 9$
Dieser Zuwachs $2a + 1 = z$ von einer Quadratzahl zur nächsten läßt sich auch grafisch veranschaulichen:



Der Zuwachs für 3 ist:
$z = 2\cdot 3 + 1 = 7$
$3^2 + 7 = 16 = 4^2$

b) a = 253 , $2\cdot 253 + 1 = 507$

c) $30^2 = 900$, Zuwachs ist für a = 30 : $2\cdot 30 + 1 = 61$ und somit $30^2 + Zuwachs = 31^2$ das sind $31^2 = 900 + 61 = 961$

© 2003 Frank Rothe, Salzburg

Lösungen "Symmetrie"

3. **a)** $47^2 = 2209$, $48^2 = 2304$, $49^2 = 2401$, $50^2 = 2500$, $51^2 = 2601$, $52^2 = 2704$,$53^2 = 2809$
Es spiegelt sich an der Zahl $50^2 = 2500$. Die letzten beiden Endziffern sind jeweils an $50^2 = 2500$ gespiegelt.

b) $97^2 = 9409, 98^2 = 9604, 99^2 = 9801, 100^2 = 10000, 101^2 = 10201, 102^2 = 10404, 103^2 = 10609$
Es spiegelt sich an der Zahl $100^2 = 10000$. Die letzten beiden Endziffern sind jeweils an $100^2 = 10000$ gespiegelt.

4. **a)** z.B. 200^2, 300^2, 1000^2; wer hat die 75^2

****b)** 1.Teil:

$$\left.\begin{aligned} 24^2 &= (25-1)^2 = 625 - \mathbf{2}\cdot\mathbf{25}\cdot\mathbf{1} + 1 = 576 \\ 25^2 &= \\ 26^2 &= (25+1)^2 = 625 + \mathbf{2}\cdot\mathbf{25}\cdot\mathbf{1} + 1 = 676 \end{aligned}\right\} \begin{gathered} \textit{Gesamtunterschied} \\ 2\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{25}\cdot\mathbf{1} = 100 \end{gathered}$$

2. Teil:

$$\begin{array}{ll} \textit{kleiner Zahl} & 5\mathbf{76} \\ \underline{+\,\textit{Gesamtunterschied}} & \underline{+1\mathbf{00}} \\ = \textit{größere Zahl} & = 6\mathbf{76} \end{array}$$

Die letzten beiden Endziffern bleiben offensichtlich unverändert, wenn die letzten beiden Ziffern des Gesamtunterschiedes Nullen sind. Das ist der Fall wenn der Gesamtunterschied 100, 200, 300, 400,...d.h. ein Vielfaches von Hundert beträgt. Daher ist 25^2 eine Spiegelungszahl.

Wie findet man nun <u>alle</u> Spiegelungszahlen , an denen die letzten beiden Endziffern gespiegelt werden? Stellen wir uns vor, wir würden eine weiter Spiegelungszahl kennen. Nennen wir sie zunächst einmal a. a steht also für eine Spiegelungszahl.

Wie würde die Rechnung von oben nun aussehen?

1. Teil:

$$\left.\begin{aligned} ...^2 &= (a-1)^2 = a^2 - \mathbf{2}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{1} + 1 = ... \\ a^2 &= \\ ...^2 &= (a+1)^2 = a^2 + \mathbf{2}\cdot\mathbf{25}\cdot\mathbf{1} + 1 = ... \end{aligned}\right\} \begin{gathered} \textit{Gesamtunterschied} \\ 2\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{1} = 4\mathrm{a} \end{gathered}$$

Jedenfalls müßte ihr Gesamtunterschied wieder ein Vielfaches von 100 sein, da sich ansonsten in dem 2. Teil der Rechnung die beiden Endziffern ändern würden..Für das Vielfache von 100 schreiben wie jetzt $100\cdot v$. Ohne den 2. Teil der Rechnung tatsächlich durchrechnen zu müssen notieren wir diesen Sachverhalt als Rechnung:

$$\text{Gesamtunterschied} = \text{Vielfache von } 100$$
$$4a = 100\cdot v$$

$$a = 25 \cdot v$$

Aha! a^2 ist eine Spiegelungszahl, wenn sie ein Vielfaches von 25 ist. Anders formuliert: Alle Spiegelungszahlen müssen Vielfache von 25 sein , also 25 , 50 , 75 , 100 , 125 , ... und 25 ist somit zugleich die kleinste Spiegelungszahl, an der die beiden letzten Endziffern gespiegelt werden.

Anmerkung: Gute Schüler werden jetzt einwenden, daß doch nur die Symmetrie nachgewiesen sei für die unmittelbaren "Nachbarn" der Spiegelungszahlen (das ist in dem ersten Beispiel die 24^2 und die 26^2 bzw. allgemein für $(a-1)$ und $(a+1)$). Dieser Einwand ist richtig. Natürlich kommt auch bei diesen Zahlen alles darauf an, daß ihr Gesamtunterschied ein Vielfaches von 100 ist, denn dann bleiben wieder die letzten beiden Endziffern im 2. Teil der Rechnung unverändert.

Wie groß ist aber nun der Gesamtunterschied von $(a-1)$ und $(a+1)$? Rechnen wir den 1. Teil der Rechnung mit diesen Zahlen:

1. Teil:

$$\left.\begin{array}{l} ...^2 = (a-b)^2 = a^2 - \mathbf{2} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 1 = ... \\ a^2 = \\ ...^2 = (a+b)^2 = a^2 + \mathbf{2} \cdot \mathbf{25} \cdot \mathbf{b} + 1 = ... \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{Gesamtunterschied} \\ 2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4\text{ab} \end{array}$$

Der Gesamtunterschied beträgt somit 4ab. Wie kann man erkennen, ob er ein Vielfaches von 100 ist? Man geht nun rein formal rechnerisch weiter...

Gesamtunterschied = Vielfache von 100

$$4a = 100 \cdot v \quad | \cdot b \text{ Trick!!!}$$
$$4ab = 100 \cdot v \cdot b$$

Die linke Seite entspricht bei genauer Betrachtung exakt dem Gesamtunterschied für beliebig symmetrisch zur Spiegelungszahl a liegende Zahlen $(a-b)$ und $(a+b)$. Und dieser ist wieder ein Vielfaches von 100. Denn "$100 \cdot \textit{irgendwas}$" - hier ist das "irgendwas" halt "$v \cdot b$" - ist ein Vielfaches von 100. Und darauf kam es an!

5. **a)** Z.B. 1000^2 , 2000^2 , 3000^2 , usw. ; hast du 2500^2 das ähnelt doch irgendwie 25^2

***b)** Z.B. $1.000.000.000^2$

****c)** 100^2 hat zwei Nullen , es werden die letzten zwei Endziffern gespiegelt;
1000^2 hat drei Nullen , es werden die letzten drei Endziffern gespiegelt;
$100.000.000.000^2$ hat elf Nullen, es werden die letzten elf Endziffern gespiegelt;
hat die Zahl $10...0^2$ genau n Nullen, so werden die letzten n Endziffern gespiegelt; n steht dabei für die Anzahl der Nullen in der Zahl $10...0^2$.

****6.** **a)** $248^2 = 61504$, $249^2 = 62001$,.$250^2 = 62500$, $251^2 = 63001$, $252^2 = 63504$;
die Spiegelungszahl ist $250^2 = 62500$ und es spiegeln sich die letzten drei Endziffern.

b) Es ähnelt dem Beispiel mit $25^2 = 625$, jedoch werden dort nur die letzten beiden Endziffern gespiegelt.

****7.** Alle Quadratzahlen die eine Spiegelachse bzgl. der letzten drei Endziffern bilden, findet man ähnlich wie die Quadratzahlen , die Spiegelungszahlen bzgl. der letzten zwei Endziffern sind. Der Gesamtunterschied ist wieder $2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4\text{ab}$ (vgl. Lsg. Nr. 4 b) und da die letzten drei

Endziffern unverändert bleiben sollen , muß dieser ein Vielfaches von 1000 sein !!!

$$\text{Gesamtunterschied} = \text{Vielfache von } 1000$$
$$4a = 1000 \cdot v \qquad | \ :4$$
$$a = 250 \cdot v$$

Die Spiegelungszahl a bzw. a^2 , bei der die letzten drei Endziffern unverändert bleiben, ist ein Vielfaches von 250^2. Also 250^2, 500^2, 750^2, 1000^2, ..., 2000^2, $...3000^2$,...
Die Kleineste ist die 250^2.

**8. Finde <u>alle</u> Quadratzahlen die eine Spiegelachse bzgl. einer beliebig vorgegebenen Anzahl von Endziffern bilden.

Es dreht sich alles um die Gleichung

Gesamtunterschied = Vielfache von ...

Bei: ...Spiegelungszahl, bei der die letzten zwei Endziffern... lautete sie:

Gesamtunterschied = Vielfache von 100

(zwei Endziffern sollen unverändert bleiben ..zwei Nullen)

Bei: ...Spiegelungszahl, bei der die letzten drei Endziffern... lautete sie:

Gesamtunterschied = Vielfache von 1000

(drei Endziffern sollen unverändert bleiben...drei Nullen)
...
Bei: ...Spiegelungszahl, bei der die letzten vier Endziffern... lautete sie:

Gesamtunterschied = Vielfache von 10000

(vier Endziffern sollen unverändert bleiben...vier Nullen)
...
Bei: ...Spiegelungszahl, bei der die letzten "n" Endziffern... lautete sie:

Gesamtunterschied = Vielfache von 1...gefolgt von "n" Nullen

("n" Endziffern sollen unverändert bleiben..."n" Nullen).
Hierbei gibt "n" an, wieviele Nullen es gibt.
Kürzer geschieben...

Bei zwei Endziffern	$4a = 100 \cdot v$	$\Rightarrow$	$a = 25 \cdot v$
Bei drei Endziffern	$4a = 1000 \cdot v$	$\Rightarrow$	$a = 250 \cdot v$
...			
Bei "n" Endziffern	$4a = 1\underbrace{0...0}_{insgesamt\,"n"\,Nullen} \cdot v$	$\Rightarrow$	$a = 25\underbrace{0...0}_{insgesamt\,("n"-2)\,Nullen} \cdot v$

Die Spiegelungszahlen a bzw. a^2 sind also immer die Vielfachen von "$a = 25\underbrace{0...0}_{insgesamt\,("n"-2)\,Nullen} \cdot v$"
und "$a = 25\underbrace{0...0}_{insgesamt\,("n"-2)\,Nullen}$" ist die kleinste Zahl mit dieser Symmetrie.

9. 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , 81 , 100 , 121 , 144 , 169 , 196;
die Zahlen $5^2 = 25$, $10^2 = 100$ sind Spiegelungszahlen , es wird jeweils die letzte Endziffer gespiegelt.

10. **a)** Z.B. $15^2 = 225$, $20^2 = 400$, „ $25^2 = 625$ " , $30^2 = 900$...

****b)** Der Gesamtunterschied ist wieder $2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4ab$ (vgl. Lsg. Nr. 4 b) und da die letzte Endziffern unverändert bleiben soll , muß dieser ein Vielfaches von 10 sein !!!

Gesamtunterschied = Vielfache von 10

$$4a = 10 \cdot v \qquad | \; :4$$

$$a = 5 \cdot \frac{v}{2}$$

Diese letzte Gleichung geht allerdings nur auf, wenn man sich für v eine gerade Zahl denkt d.h. $v = 2, 4, 6, 8, ...$. Dann nimmt der Bruch $\frac{v}{2}$ jeweils die Werte 1, 2, 3, 4, ... an. Und als Spiegelungszahlen a bzw. a^2 kommen alle Vielfachen von 5 d.h. 5^2 , 10^2 , 15^2 , 20^2 , „ 25^2 " , 30^2 , 35^2, ... infrage. Die kleinste Spiegelungszahl, bei der die letzte Endziffer unverändert bleibt ist die 5^2. Warum steht die 25^2 wohl in Anführungszeichen?

Lösungen “Symmetrie bei Dualzahlen”

*****11.**

1_{10}	=	1_2	;	$(1_2)^2$	=	1_2	$(= 0001_2)$
2_{10}	=	10_2	;	$(10_2)^2$	=	100_2	$(= 0100_2)$
3_{10}	=	11_2	;	$(11_2)^2$	=	1.001_2	$(= 1001_2)$
4_{10}	=	100_2	;	$(100_2)^2$	=	10.000_2	
5_{10}	=	101_2	;	$(101_2)^2$	=	11.001_2	
6_{10}	=	110_2	;	$(110_2)^2$	=	100.100_2	
7_{10}	=	111_2	;	$(111_2)^2$	=	110.001_2	
8_{10}	=	1000_2	;	$(1000_2)^2$	=	$1.000.000_2$	
9_{10}	=	1001_2	;	$(1001_2)^2$	=	$1.010.001_2$	
10_{10}	=	1010_2	;	$(1010_2)^2$	=	$1.100.100_2$	

a) Spiegelungszahl bzgl. der drei letzten Endziffern sind 100_2 , 10.000_2 , 100.100_2 , ... das sind im Dezimalsystem ausgedrückt 2_{10} , 4_{10} , 6_{10} , ... die geraden Zahlen!
Begründung:
Der Gesamtunterschied ist nach wie vor $2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4ab$ (vgl. Lsg. Nr. 4 b) und da die letzten drei Endziffern unverändert bleiben soll , muß dieser ein Vielfaches von “1000_2“ sein ! Vorsicht: 1000_2 steht im Dezimalsystem eigentlich für 8_{10}. Doch hat jetzt eben die 1000_2 drei Nullen als Endziffern, wodurch im Teil 2 der Rechnung (vgl. Lsg. 4. b) die drei letzten Stellen nicht verändert würden. Weiters ergäbe sich für die bisher so wichtige Gleichung - wenn man gleichzeitig im Dezimal- und Dualsystem denkt - :

$$\overbrace{4a}^{\text{Dezimalsystem}} = \overbrace{1000_2 \cdot v}^{\text{Dualsystem}}$$

bzw. ganz ins Dezimalsystem umgerechnet

$$\overbrace{4a}^{\text{Dezimalsystem}} = \overbrace{8_{10} \cdot v}^{\text{Dezimalsystem}}$$

$$4a = 8 \cdot v \qquad | :4$$

$$a = 2 \cdot v$$

...d.h. die Spiegelungszahlen a bzw. a^2 sind Vielfachen von 2_{10} m.a.W. die geraden Zahlen.

b) Spiegelungszahl bzgl. der vier letzten Endziffern sind 10.000_2 , $1.000.000_2$, ... das sind im Dezimalsystem ausgedrückt 4_{10} , 8_{10} , ...!
Begründung:
Man geht gleich vor wie bei a) jedoch hat man statt 1000_2 jetzt 10000_2 (“vier

© 2003 Frank Rothe, Salzburg

Endziffern= vier Nullen")

$$\overbrace{4a}^{\text{Dezimalsystem}} = \overbrace{10000_2}^{\text{Dualsystem}} \cdot v$$

bzw. ganz ins Dezimalsystem umgerechnet

$$\begin{aligned} \overbrace{4a}^{\text{Dezimalsystem}} &= \overbrace{16_{10}}^{\text{Dezimalsystem}} \cdot v \\ 4a &= 16 \cdot v \qquad | :4 \\ a &= 4 \cdot v \end{aligned}$$

...d.h. die Spiegelungszahlen a bzw. a^2 sind Vielfachen von 4_{10}

c) Eine Überraschung! Jede Dualzahl ist Spiegelungszahl bzgl. der letzten zwei Endziffern.
Begründung:
Jetzt hat man 100_2 ("zwei Endziffern= zwei Nullen")

$$\overbrace{4a}^{\text{Dezimalsystem}} = \overbrace{100_2}^{\text{Dualsystem}} \cdot v$$

bzw. ganz ins Dezimalsystem umgerechnet

$$\begin{aligned} \overbrace{4a}^{\text{Dezimalsystem}} &= \overbrace{4_{10}}^{\text{Dezimalsystem}} \cdot v \\ 4a &= 4 \cdot v \qquad | :4 \\ a &= 1 \cdot v \end{aligned}$$

...d.h. die Spiegelungszahlen a bzw. a^2 sind Vielfachen von 1_{10} und das ist schließlich jede Zahl.

d) Wenn schon jede Zahl Spiegelungszahl bzgl. der zwei letzten Endziffern ist, ist natürlich auch jede Zahl Spiegelungszahl bzgl. nur der letzten Endziffer!

Literatur:

[1] Arnold Bernhard, "ALGEBRA für die siebte und achte Klasse an Waldorfschulen", Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben, 1991

[2] Frank Rothe, "Algebra I", Salzburg: im Selbstverlag, 2001
(Samstr. 49 B , A-5023 Salzburg, Tel.=Fax: 0043/662/665643,
e-mail: frank.rothe@utanet.at , homepage: www.calculemus.at)

© 2003 Frank Rothe, Salzburg