Seminar über Mathematik für Klassenlehrer

gehalten von Dr. Hermann v. Baravalle in München 1955
hier zusammengestellt nach Notizen von P. Gmeindl, München.

1. Tag: Grundregel: Es gibt 2 Grundelemente der Tätigkeit, die Vorstellung entstehen lassen: Bild und Rhythmus

a) Multiplikation, kleines 1×1:
Das Zählen: laut und leise, dann rhythmisch; immer die Finger zuhilfe nehmen. Das 1×1 rhythmisch, erst mündlich, dann schriftlich: 1 2 3 4 5 6 ... 1 2 **3** 4 5 **6**, dann ..3..6..9... übe nicht verschiedene Dinge hintereinander, die nicht zusammengehören. Das schädet der Disziplin.

Warum steht auf der Uhr oben eine 12? nur Konvention?

Für die Reihen von 1, 2, 3, 4, 6 je eine Kindergruppe einteilen, die nun zugleich zählen, aber jede Gruppe nur ihre Zahlen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	2		4		6		8		10		12
		3			6			9			12
			4				8				12
					6						12

Bei „12" sprechen alle mit.

2, 3, 4, 6 sind jene vier Zahlen, die am frühesten zusammenklingen. 2, 3, 4, 5 klingen erst bei 60 zusammen, die 12 ist also auch mathematisch genau gerechtfertigt.

Nimmt man die Einser-Reihe dazu, so erhält man folgendes Bild:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	2		4		6		8		10		12		14		16		18		20	
		3			6			9			12			15			18			21
			4				8				12				16				20	
					6						12						18			

Die Ordnung und das genaue Untereinanderschreiben gehören schon zum 1. Tag, wenn man es auch erst beim schriftl. Rechnen braucht.

b) Addition: Die Multiplikation ist viel unmittelbarer als die Addition. Vorübung ist die Zahlenfolge; mitten drin beginnen lassen und weiter zählen: immer 3 Schritte, dann stehen bleiben:

schriftlich: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...

3 Schritte 3 Schritte

$4 + 3 = 7$ $12 + 3 = 15$

durch Rückwärtszählen löst man die Subtraktion:

$14 - 3 = 11$ (von 14 drei Schritte zurück)

Beim Addieren mehrerer Zahlen ganze Folge anschreiben und an dieser Folge abzählen lassen:

5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

$5 + 2 + 6 + 4 + 3 = 20$

$5 + 2 = 7$

dann $7 + 6 = 13$

$13 + 4 = 17$

$17 + 3 = 20$

dann

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ \hline 20 \end{array}$$

Der letzte, fertigste Prozeß der Operation, meist auch der einfachste, gehört an den Schluß der Entwicklung.

c) Schriftliches Multiplizieren:

$$\begin{array}{r} 2\,347\,185 \cdot 3 \\ \hline 15 \\ 24 \\ 3 \\ 21 \\ 12 \\ 9 \\ 6 \\ \hline 7\,041\,555 \end{array}$$

oder von links:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} 2 & 3 & 4 & 7 & 185 \cdot 3 \\ \hline 6 & & & & \\ & 9 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & & 3 \\ & & & & 24 \\ & & & & \;\,15 \\ \hline 7 & 0 & 4 & 1 & 555 \end{array}$$

senkrechte Hilfslinien verwenden!

oder etwas abgeschliffen und kürzer geschrieben:

$$\begin{array}{r} 2\,347\,185 \cdot 3 \\ \hline 6\,921\,315 \\ 12\;\;\;24\; \\ \hline 7\,041\,555 \end{array}$$

und noch kürzer: $\dfrac{2_1\,3_1 4_2 7\;\;1_2 8 5 \cdot 3}{7\,041\,555}$

die kleinen Merkziffern können auch noch wegbleiben

Es muß zunächst nicht festgelegt sein, sondern es ist ein freies Operieren. Ich kann es aufschreiben, wie ich will; dann erst vereinfachen.

Auf dem Dürer-Stich „Melencolia I" (Melancholie geh!) findet man ein magisches Quadrat (gefunden 1636)

Die zur Feldmaus gewordene Welt muß fliehen, schulmeisterliche Grübelei. Dürer läßt die verschiedenen neuen Geistigkeiten sprechen. Die neuen Wissenschaften brechen herein und die alte Zeit geht, das Feldmausgebilde der Verstandeskultur.

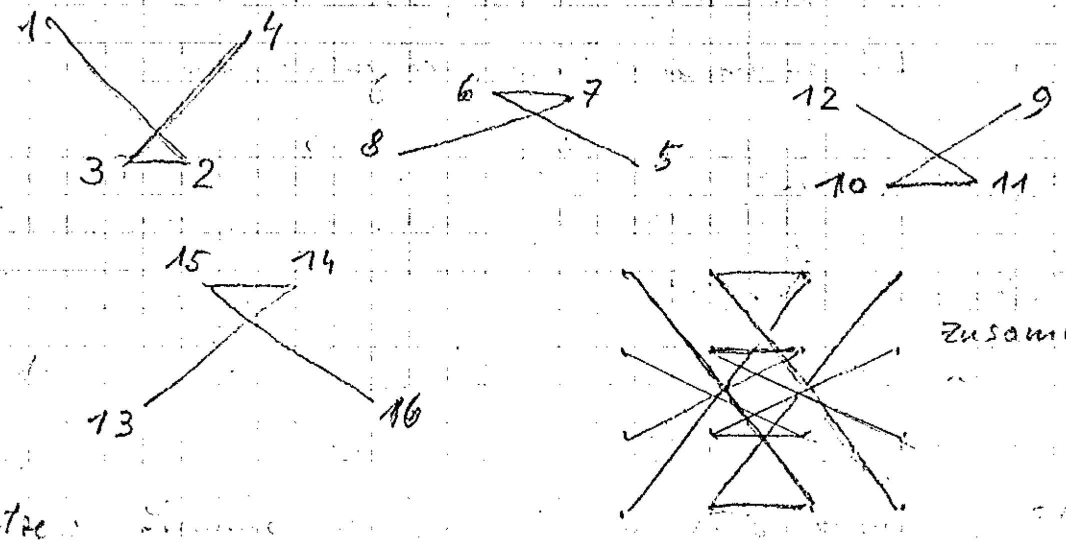
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

→ Summen aller Zeilen 34

↓ Summen aller Spalten 34

Summen der Diagonalen 34

Aufbau:



zusammen

Weitere Gesetze:

Summe der Ecken des großen Quadrats 1 4 13 16 — 34

" " " " kleinen " 6 7 10 11 — 34

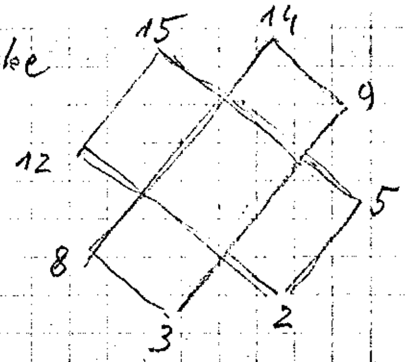
" " " " Rechtecks 12 9 8 5 — 34

" " " " " 15 14 3 2 — 34

" kleine Welle: 12 7 10 5 — 34

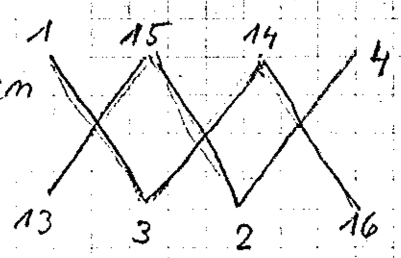
kleine Welle: 8 6 11 9 — 34

Summe der Ecken der Rechtecke



34
34

Summe der großen Wellen



34

2. Tag: Die Kinder vertragen relativ früh kleine, mittelgroße und große Zahlen. Beschränkung auf praktische Beispiele ist überholt. Drill, blödes Einpauken sind eine Qual. Leute, die diese Qualen erlebt haben, sitzen heute in den Landtagen.
Unsere Methode mag alt sein, aber die Kinder sollen wirklich am Schluß rechnen können. Manches ist schön und zieht vorüber, aber gewisse Dinge bleiben doch aus jeder Epoche. Dann aber alles menschlich behandeln und zeigen, daß es draußen auch gilt.

Noch zum magischen Quadrat:

Die Summe der Zahlen 1 bis 16 läßt sich leicht angeben:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

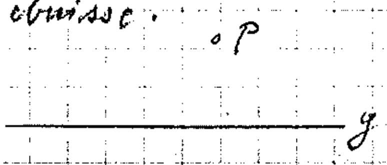
17
17
17

Je ein Paar hat die Summe 17; es sind 8 Paare, also ist die Summe 8 · 17, nimmt man aber nicht 2, sondern 4 Zahlen, so kann man es so einrichten, daß ihre Summe 2 · 17 = 34 ist. Also 4 Vierergruppen mit je der Summe 34 bilden das magische Quadrat.

Unsere Kinder heute bringen mehr Begabung mit für Mathematik als unsere Eltern. Sie haben wache intellektuelle Bedürfnisse. Mit ihren Kräften müssen wir etwas tun.

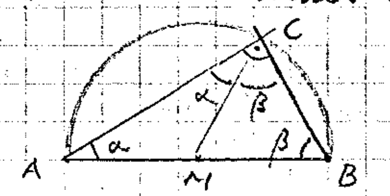
Intellektuelle Kraft muß befriedigt werden, dann sind die Kinder bei den Märchen und beim Erzählen viel ruhiger und haben die richtige Stimmung. Ein lebendiger Rechenunterricht macht Kräfte frei.
Am magischen Quadrat haben wir gelernt: Mehr probieren und nicht logisch ableiten, also bei den Kindern bleiben.

Geometrie nach euklidischem System ist heute unmöglich. In den USA ist nach genauen Umfragen die Geometrie der verhassteste Gegenstand. Man versucht daher, nach unseren Methoden zu arbeiten und von der euklidischen Methode wegzukommen. Euklids Bücher sind der zusammenfassende Abschluß einer langen Entwicklung und gerade deshalb als Schulbücher nicht geeignet. Sie zeigen nicht die Entwicklung auf, sondern deren Ergebnisse.



Beispiel: Der Beweis, daß es nur ein Lot von P auf g gibt. Das ist so ein säuerliches Ding.

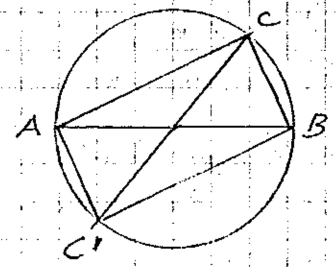
Zum Satz von Thales:



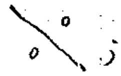
Dreiecke im Halbkreis sind rechtwinklig.

Warum ist das so? Der übliche Beweis verwendet die gleichschenkligen Dreiecke AMC und BMC: $2\alpha + 2\beta = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck ABC) also ist $\alpha + \beta = 90°$.

Anschaulicher und direkter: Zum Rechteck im vollen Kreis ergänzen:



3. Tag:

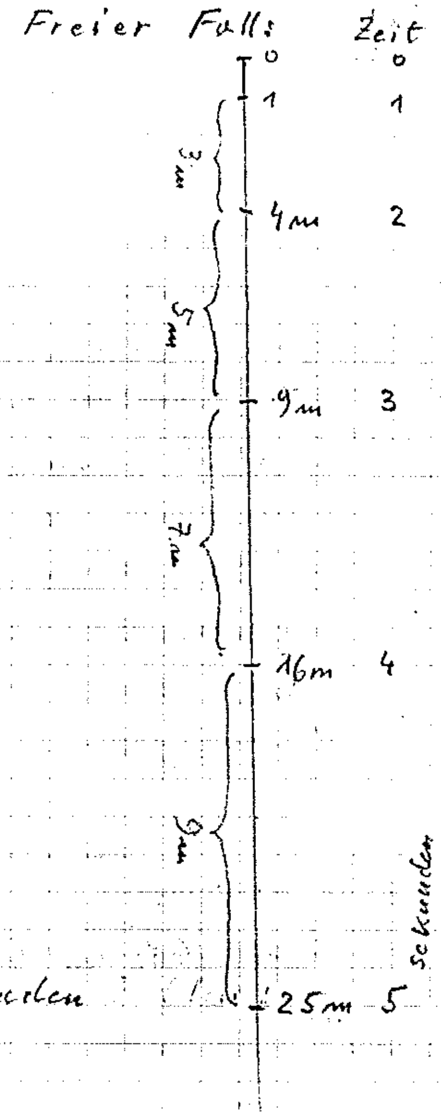
Zurück zum Einmaleins. Wichtige Dinge sollte man auf höherer Stufe immer wieder aufgreifen und vertiefen. Keine abgeschlossenen Erkenntnisse, sondern mit den Kindern wachsende Begriffe anlegen.
Am Ende der 3. Klasse sollen die vier Grundrechnungsarten schriftlich und mündlich sitzen. Die Einmaleinsreihen kann man nun im Quadrat zusammenstellen: (nächste Seite)
Die Reihen sind nun doppelt da: senkrecht und waagrecht. Gleiche Zahlen liegen symmetrisch zur Diagonale mit den Quadratzahlen.  ; Quadratzahlen kann man z.B. so bilden:

$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & 1 \\
1+2+1 & = & 4 \\
1+2+3+2+1 & = & 9 \\
1+2+3+4+3+2+1 & = & 16 \\
1+2+3+4+5+4+3+2+1 & = & 25 \\
1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1 & = & 36
\end{array}
$$

u.s.w.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	44	45	50	
6	12	18	24	30	36					
7	14	21	28	35		49				
8	16	24	32	40			64			
9	18	27	36	45				81		
10	20	30	40	50					100	
⋮										

Quadratzahlen



Quadratzahlen sind aber auch Summen von ungeraden Zahlen:

1 = 1
1 + 3 = 4
1 + 3 + 5 = 9
1 + 3 + 5 + 7 = 16
1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36

u.s.w.

Über diese Dinge denken Kinder viel nach. Es sind mathematische Ur-Gesetze. Zusammenhang mit dem freien Fall: hier rechts oben. Das Rechnen ist auch inneres Erleben, innere Ordnung, Notwendigkeit, Zusammenstimmen. Das Kind geht von innen nach außen. Das Rechnen ist nicht in erster Linie äußerlich rational, sondern auch eine innere Welt, wie das Märchen. An vielen Stellen erlebbar:

Bild der geraden und ungeraden Zahlen auf Spielkarten

Seitenzahlen im Buch: rechts ungerade, links gerade

Hausnummern längs einer Straße: rechts gerade, links ungerade

Sitzplätze in einem Theatersaal: " " "

Zahlengesetze des Kalenders

Nicht Textaufgaben mit unwirklichem Text geben! Von innen her aufwachen lassen zu der neuen Bewußtseinsstufe.

Man hat die Beispiele immer erst von innen und dann kann man sich nach außen wenden. In der Geometrie ist es ebenso. Zuerst die Gesetzmäßigkeiten im inneren erarbeiten, dann sieht man sie auch in der Welt draußen. Innen wird ein Sinn erweckt und mit dem stehe ich dann vor der Außenwelt. Auch im Physikunterricht sehen die Kinder in den Museen und Techn. Betrieben nur das, was sie zuvor aus der Tätigkeit der inneren Vorstellung gewonnen haben.

Zu den Einmaleinsreihen noch eine einfache Gesetzmäßigkeit:

Je 2 Reihen sind Partner mit gleichen <u>Einer</u>ziffern, aber in verkehrter Reihenfolge; Partner-Grundzahlen haben Summe 10:

3 und 7:	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

die andere Reihe kann man auch in verkehrter Reihenfolge schreiben:

4 und 6	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	0

gleiche Zahl, weil $4 \cdot 6 = 6 \cdot 4$ ist.

bei 9 und 1 ist die Sache ja gut bekannt:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
90	81	72	63	54	45	36	27	18	9	0

Partnerreihe von <u>5</u> ist wieder <u>5</u>.

Hinweis zum schriftl. Multiplizieren: Man sollte auch den schwächsten Rechnern einen Weg zeigen, auf dem sie zum Ziel kommen:

```
 4563782 · 4          4563782 · 4
   2012328  )+          2012328
 162428               162428
 18255128             18255128       (so ist es gemeint)
```

4. Tag: schriftl. Dividieren; konnte leider nicht teilnehmen.
Vielleicht ist das in den bekannten Didaktik-Büchern von Baravalle zu finden.
„Läufer"-Methode beim Addieren, schriftl. Subtrahieren

Verschiedene Stufen des schriftl. Subtrahierens!

5. Tag. Frage: Wie weit kann man zählen? Addieren und zählen kann man immer weiter und weiter. Es hat kein Ende. Der längste Faden hat ein Ende, das Leben auch, aber das Zählen nicht. Wenn man aber rückwärts zählt? 3, 2, 1, 0, Ende. Auf der anderen Seite gibt es also ein Ende. Rückwärts sagt also der Läufer: Ich kann nicht mehr weiter. Jetzt sagt ihr mir nur, ob es geht oder nicht: 8 − 5 ja, 5 − 8 nein; das als Einleitung. Negative Zahlen sind noch nicht eingeführt. Das ist an gewisse Bedingungen gebunden.

9 − 6 geht? ja; Ergebnis 3. 5 − 6 geht nicht. Wir helfen uns dann und sagen 15 − 6; 7 − 2 geht; 2 − 7 nicht; wir sagen daher 12 − 7 = 5; Nun stellen wir eine Tabelle auf:

Zahlen	geht es?	Ergebnis	im Falle nein: 10 dazu!	Ergebnis
9 − 6	ja	3		
4 − 6	nein		14 − 6	8
7 − 2	ja	5		
2 − 5	nein		12 − 5	7
6 − 3	ja	3		
4 − 5	nein		14 − 5	9

Nun wollen wir rechnen:

```
   1 2|1 5      15 statt 5,
 5 6 2 7 5 9    12 statt 2.
− 4 3 5 2 6 6
 1 3 7 5 9 3    Wo wir 1 dazugegeben haben,
   1   1        nehmen wir wieder 1 weg
 1 2 7 4 9 3    Ergebnis
```

Später machen wir es nach der Austrian method*. Wenn wir 2 von 7 − 1 abziehen, können wir auch "2 + 1 von 7 abziehen", also unten gleich die 1 dazuzählen:

```
  5 6 2 7 5 9
− 4 ₁3 5 ₁2 6 6
  1 2 7 4 9 3
```

gesprochen: 6 und 3 ist 9 — 3 betonen und sofort anschreiben

6 und 9 ist 15 — 9 " "

Wenn man 15 spricht, schreibt man die kleine 1 beim Wort -zehn an

3 und 4 ist 7

u.s.w.

Bruchrechnen:

Wir führen die Brüche meist durch Teilung ein. Es gibt aber noch andere Möglichkeiten:

1) Vom Ganzen zum Teil:  u.s.w.

2) Eine Familie hat 3 Kinder. Wenn eines in die Schule geht fehlt von der Kindergruppe daheim $\frac{1}{3}$. Oder die ganze Familie hat 5 Personen, die gehören zusammen. Der eine in der Schule ist $\frac{1}{5}$ der Familie. Das ist auch ein Bruch.

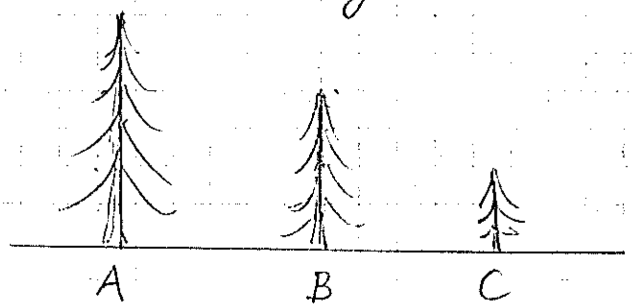
Die 4. Klasse hat 32 Kinder. Eines davon ist $\frac{1}{32}$ der Klasse. Wenn aber der Lehrer auch dazugehört, ist Uwe $\frac{1}{33}$ der Klasse. Die Schule hat 600 Kinder. Uwe ist auch ein Stückchen davon: $\frac{1}{600}$. Wenn aber die Lehrer dabei sind, ist er $\frac{1}{630}$ der Schulgemeinschaft. Mitarbeiter im Büro und alle, die so schön saubermachen, gehören auch dazu: Dann ist Uwe $\frac{1}{642}$ dieser Gemeinschaft.

Man kann das auf München, Bayern, Deutschland ausdehnen. Bananen, die wir essen, haben auch Menschen gepflückt. 2,2 Milliarden Menschen sind es etwa. (heute wohl ca. 5,2 Milliarden?)

Man soll nicht immer atomisieren, sondern das Ganze betrachten. Man kann auch vom Einzelnen ins Ganze gehen: Die Scheibenfläche ist ein Bruchteil der Fensterfläche. Ein soziales Element schwingt da mit. Eine Stufe ist ein Bruchteil der ganzen Treppe. Oder eine Seite in einem Buch, eine Spielkarte: Wenn eine Karte verloren oder zerstört ist, ist das ganze Spiel wertlos. Ein Bruchteil kann das Ganze zerstören. Eine Minute kann den Tag verderben, wenn der Zug versäumt wird. Der HU hat 100 Minuten. Eines hat eine Minute zum Fenster hinausgeschaut und dadurch etwas Wichtiges versäumt. Daher hat er das Ganze nicht recht verstanden. Bewußt machen, wie viele Dinge nur Sinn haben als Teil eines Ganzen.

3) Brüche als Vergleich:

Baum A ist $1\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ mal so hoch wie Baum B
Baum B hat $\frac{2}{3}$ der Höhe von A; C hat $\frac{1}{3}$ von A



Beachte: $\underbrace{A = \frac{3}{2} B \;;\quad B = \frac{2}{3} A}_{\text{reziproker Wert}}$

C hat $\frac{1}{3}$ von A
A hat 3 mal C

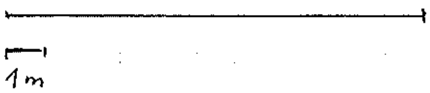
Weitere Beispiele mit doppelt und halb so groß.

Das ist weder ein Teil, noch ein Ganzes, sondern ein Vergleich zwischen zwei Dingen. Er ist doppelseitig ⟷, es ist auch eine sozial bildende Sache: Man soll sie beide hören! Später wird daraus der Begriff des Verhältnisses entwickelt.

Wo gibt es noch solche Brüche? Der kleinste und der größte der Klasse

Wie lange geht Uwe nach Hause? wie lange gehst du? Vergleich!

Zwei besonders verschiedene oder zwei fast gleiche?



Der Weg ist 11 m lang. Das heißt nicht 11 einzelne Meter, sondern 11 mal so lang wie 1 m.

Buch 12 km   das heißt: 1 km ist $\frac{1}{12}$ dieses Weges

6. Tag: Zur Einführung der Algebra:

Zum Rost wegbringen, der seit der letzten Epoche auf dem Denken liegt.

35724 · 68359 ausmultiplizieren lassen!

Wenn einer schnell fertig ist: Ich habe noch eine Aufgabe:

68359 · 35724   Die Angabe ist scheinbar gleich, die Zeilen sind dann aber ganz verschieden. Man zweifelt, ob das Gleiche herauskommt. Es zeigt sich auch erst beim Addieren der Teilprodukte. Das gilt anscheinend bei jeder Multiplikation. Das wollen wir gleich an den Anfang setzen. Die alten Römer haben das Ergebnis eines ganzen Kriegszuges mit 3 Wörtern ausgedrückt: veni, vidi, vici.

Wir probieren das nun, so gut wir können, auch für unser Ergebnis:

Ein Satz: Wenn man zwei Zahlen miteinander multipliziert, ... u.s.w.

Das ist ein langer Satz. Kürzer geht es mit dem Begriff „Faktor":

Faktoren sind vertauschbar, also auch 3 Wörter; aber der Mathematiker schreibt es noch kürzer: $a \cdot b = b \cdot a$.

Was sollen die Buchstaben bedeuten? Warum nicht $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$?

Das sieht doch viel mehr nach Rechnen aus, gilt aber bloß für 4 und 5.

Deshalb also die Buchstaben: Man könnte auch so schreiben:

$D \cdot E = E \cdot D$, aber Buchstaben sind doch besser, weil man sie schneller schreiben kann, oder auch mit der Schreibmaschine. Das heißt also Algebra: Zahlengesetze einfach und allgemeingültig angeben. Na, wenn das alles ist? Das können wir auch.

Wir schauen nocheinmal auf die Bruchrechnung. Da braucht man die Begriffe: Größter gemeinsamer Teiler: ggT
(oder größtes gemeinsames Maß)

und kleinstes gemeinsames Vielfaches: kgV

Beispiel: $\frac{154}{182}$ kürze den Bruch! Wenn man das in einem Schritt tun will, braucht man den ggT.

Teiler von 154 sind 2, 7, 11, 14, 22, 77

Teiler von 182 sind 2, 7, 13, 14, 26, 91

gemeinsame Teiler sind 2, 7, 14; der ggT ist 14

also kürzen wir durch 14: $\frac{154}{182} = \frac{11}{13}$

Beispiel für kgV: $\frac{7}{12} + \frac{5}{18} - \frac{1}{4} =$; 4 ist schon in 12 enthalten,

Vielfache von 12: 24, 36, 48, 60, 72, ...

" von 18: 36, 54, 72, 90, ...

gemeinsame Vielfache: 36, 72, 108, ...

kgV ist 36, also der gemeinsame Nenner, oder Hauptnenner:

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{18} - \frac{1}{4} = \frac{7\cdot 3}{12\cdot 3} + \frac{5\cdot 2}{18\cdot 2} - \frac{1\cdot 9}{4\cdot 9} = \frac{21+10-9}{36} = \frac{22}{36}$$

das kann man noch kürzen. $\frac{22}{36} = \frac{11}{18}$

Es gibt noch andere Zahlenverwandtschaften, z.B. befreundete Zahlen.

Pythagoras wurde gefragt: Was ist die beste Form der Freundschaft?
Sollen Freunde möglichst ähnlich sein? Seine Antwort: Nein!, Wenn das so wäre, würde man sich selbst am meisten lieben. Nicht die Gleichheit fundiert die Freundschaft, sondern das, was sich so aufeinander bezieht wie die beiden Zahlen 220 und 284.

Wir suchen die Primfaktoren von 220 und von 284

220	2
110	2
55	5
11	11
1	

also $220 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 11$;
$= 2^2\cdot 5\cdot 11$

284	2
142	2
71	71
1	

$284 = 2\cdot 2\cdot 71$
$= 2^2\cdot 71$

Welche Teiler haben die beiden Zahlen?

220 hat die Teiler: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 — Summe 284

284 hat die Teiler 1, 2, 4, 71, 142 — Summe 220

Bilden wir nun jeweils die Summe der Teiler, so stellt sich heraus: Die Teilersumme von 220 ist 284, die von 284 ist 220

Was in der einen Zahl additiv enthalten ist, enthält die andere multiplikativ. Für Freunde: Der eine hat das in verinnerlichter Form, was beim anderen Verhältnis zur Außenwelt ist, und umgekehrt.

Etwa 2000 Jahre lang wurde kein anderes Zahlenpaar mit dieser Eigenschaft gefunden. Heute kennt man viele, aber schon das nächste Paar liegt in den Tausendern.

Anmerkung: Zum Kürzen muß man nicht unbedingt den ggT kennen; es genügt u. U. die Faktorenzerlegung von Zähler und Nenner:

$$\frac{78}{104} = \frac{2\cdot3\cdot13}{2\cdot4\cdot13} = \frac{3}{4}, \quad \frac{220}{284} = \frac{2\cdot2\cdot5\cdot11}{2\cdot2\cdot71} = \frac{55}{71}$$

---

7. Tag: Zinsrechnung.

Einleitung: Die Indianer und die Weißen.

Die Weißen haben ihnen angeboten, Handelsbeziehungen einzugehen. Die Indianer aber lehnen ab: Wenn ihr gesagt hättet: wir geben euch das Geld, weil wir feste Häuser haben und ihr müßt etwas zahlen dafür. Aber wir sollen noch etwas bekommen dafür, da muß etwas faul sein. Also das Problem der Zinsen grundsätzlich aufgreifen. Entweder festen Satz, oder: Wer mehr Geld bringt, bekommt mehr, also die Notwendigkeit, pro cent zu rechnen. Und wieder die Frage: Muß man die Zinsen auch nach der Zeit staffeln? Es würde sonst jeder das Geld jeden Monat in eine andere Bank bringen!

Kapital $K = 200$ DM
Zinssatz $p = 3\%$
Zeit $t = 5$ Jahre

Zins $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100} = \frac{200 \cdot 3 \cdot 5}{100} = 30$ DM

Unterschied zum Zinseszins beachten!

Schlußrechnung (Dreisatzrechnung)

Von innen nach außen! Zuerst die Operation von innen aufwachen lassen, dann erst sehen, wie das im Leben draußen ist.

$$\frac{10 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9}{3 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{5}{6}$$

Ich mache 10 zweimal so groß, 3 mal so klein, 5 mal so groß, 15 mal so klein, 4 mal so groß u.s.w., also einmal größer, einmal kleiner, dann vereinfache ich durch Kürzen und bekomme $\frac{5}{6}$. Wo gibt es das, daß etwas größer und kleiner wird? Ich habe eingekauft: 5 kg Zucker, das sind 3,60, dann wieviel kostet 1 kg, also : 5, dann wieviel kosten 7 kg? mal 7. Der Einkauf ist für 12 Personen, was zahlt jeder? also : 12. Dasselbe für 4 Monate? also mal 4 u.s.w.
Der Verkäufer sagt: Weil ihr so viel kauft, gebe ich es um den halben Preis, also : 2.

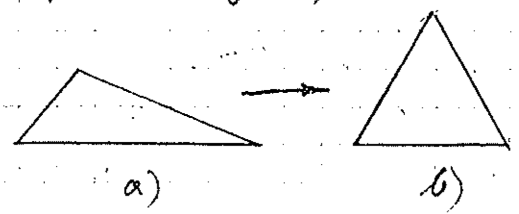
Die Kinder selbst Beispiele finden lassen! Wo wird etwas einmal groß, einmal klein?

Erst die ganze Operation,
dann das groß, klein, dann
das Entdecken der Operation
im Leben, dann die Beispiele.

$$\frac{3{,}60 \cdot 7 \cdot 4}{5 \cdot 12 \cdot 2}$$

Geometrie

Von welchem Ansatzpunkt aus wird dieser Gegenstand in Angriff genommen? z.B.: mehr vom Definitionsartigen, Gedanklichen, Begriffsartigen, Anschaulichem ausgehend?



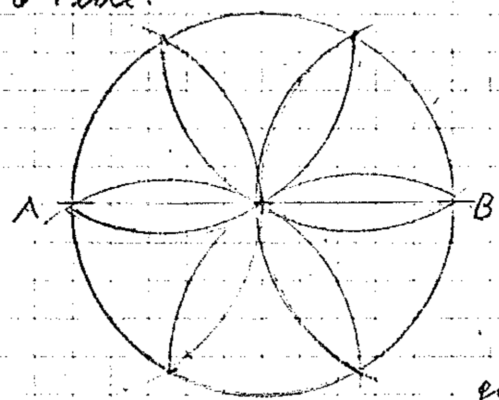
a) allgemeines Dreieck
b) Sonderfall, Spezialfall

Nach unserer Methodik geht man den umgekehrten Weg, denn dem Kind ist nicht das allgemeine Dreieck näher. Das, was die Dreiecksnatur am vollendetsten darstellt, ist das gleichseitige Dreieck. Das andere ist ja ein Dreieck, das in die Länge gezogen wurde. Wir beginnen also mit den regelmäßigen Formen und gehen dann zu den unregelmäßigen. Das ist der Weg vom Bild zu dem, was bildloser ist.

Am Anfang steht also das Zeichnen der regelmäßigen Formen. Die Kinder fragen dann viel, wir müssen darauf vorbereitet sein:

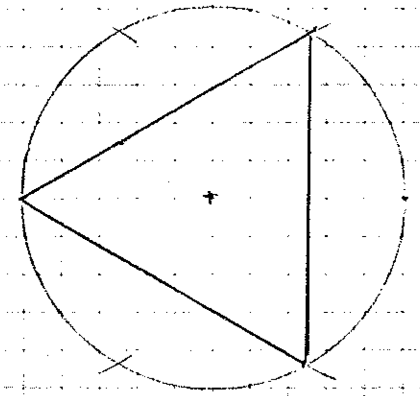
Prinzip der Lehrbücher: Ja nichts sagen, wozu man nicht den genauen Beweis-Aufbau liefern kann. Das gehört über Bord geworfen! Wir teilen den Kreis in 2, 3, 4, 8, 6, 5 gleiche Teile

6 Teile:



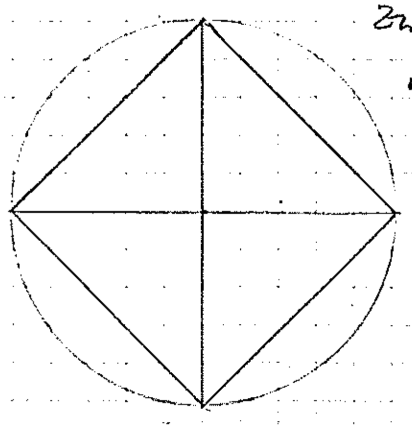
Ur-Erfahrung am Kreis: Der Radius läßt sich 6 mal am Umfang (als Sehne) abtragen.
Genauer: Zuerst einen Durchmesser zeichnen (AB), dann von den Endpunkten aus den Radius nach beiden Seiten abtragen. Zuerst ganze Kreisbogen, dann nur noch, was nötig ist.

3 Teile:



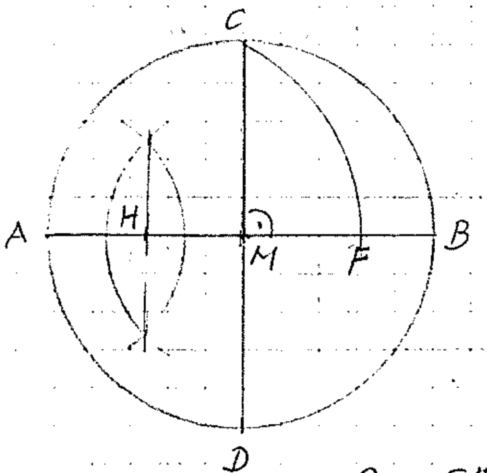
Von 6 Teilpunkten nur jeden zweiten verwenden

4 Teile:



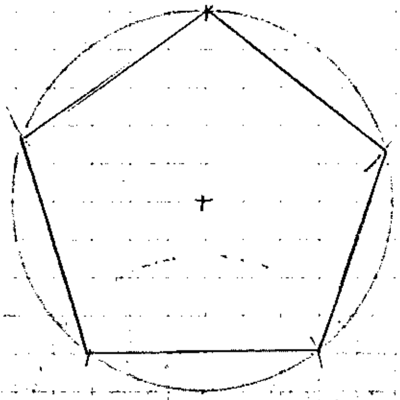
Zwei Durchmesser zeichnen, die aufeinander senkrecht stehen

5 Teile (nur „Rezept", dessen Begründung mit dem goldenen Schnitt in der Oberstufe gegeben werden kann)

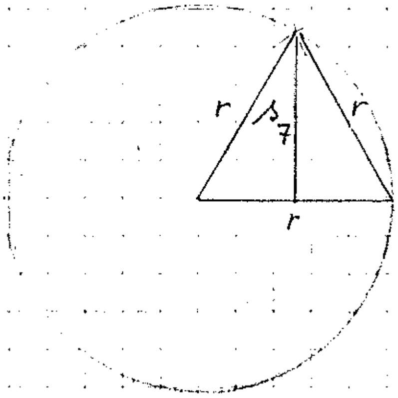


A, B, C, H ist Halbierungspunkt von $\overline{AM}$. Kreisbogen um H mit Radius $\overline{HC}$ schneidet MB im Punkt F. Dann ist $\overline{CF}$ die Fünfeckseite, die man 5 mal auf dem Umfang (als Sehne) abtragen kann, $\overline{MF}$ die Zehneckseite

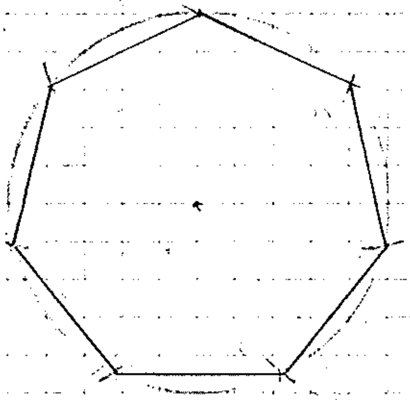
Das Fünfeck gelingt am genauesten, wenn man $s_5 = \overline{CF}$ von C aus nach beiden Seiten und $s_{10} = \overline{MF}$ von D aus nach beiden Seiten abträgt.



7 Teile: hier gibt es nur eine (sehr gute) Näherungskonstruktion:



Die Höhe s_7 des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite r ist die Siebeneckseite s_7 (bei r = 10 cm ist s_7 etwa 1,7 Tausendstel cm zu kurz)



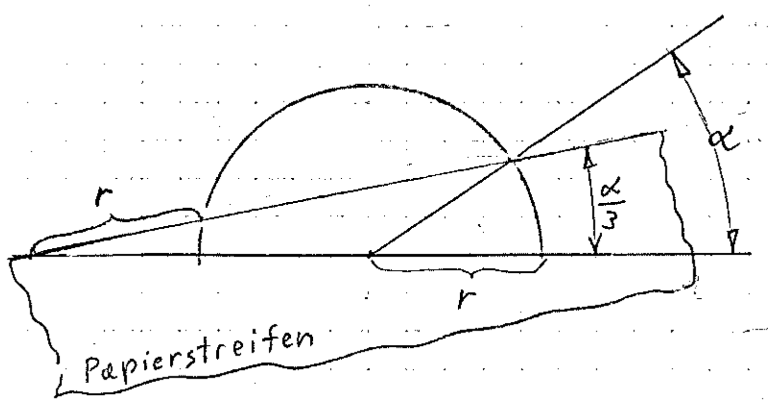
8 Teile: Winkel bei 4 Teilen halbieren

10 Teile: Zuerst 5-eck, dann s_{10} von jedem Punkt aus abtragen oder Winkel halbieren oder zu jedem Punkt den Gegenpunkt zeichnen über den Kreismittelp. auf die andere Seite.

12 Teile: zwei aufeinander senkrechte Durchmesser zeichnen und von jedem der 4 Endpunkte den Radius nach beiden Seiten abtragen.

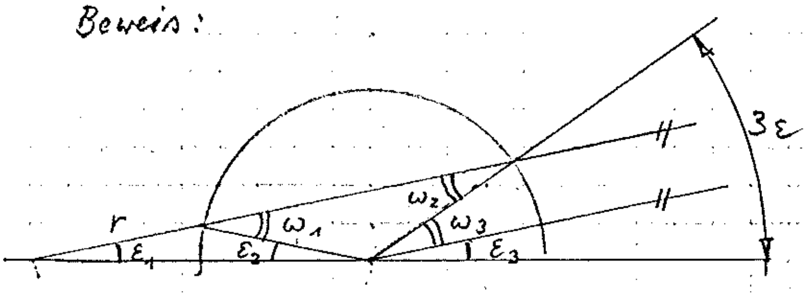
9 Teile: siehe nächste Seite! Ist vielleicht für begabte Schüler der 7. oder 8. Klasse verständlich.

9 Teile: Das kann man mit der Dreiteilung eines Winkels machen. Diese ist zwar nicht mit Zirkel und Lineal möglich, aber mit einem Papierstreifen, den man in die richtige Stellung einschieben muß:



schlage um den Scheitel des gegebenen Winkels α einen Halbkreis mit beliebigem Radius r. Passe einen Papierstreifen, auf dem r angemerkt ist, so ein, wie es die Skizze zeigt, dann ist er um $\frac{\alpha}{3}$ gegen die waagrechte Basis geneigt. (Vieta)

Beweis:



$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (Basiswinkel im gleichschenkl. Dreieck mit Schenkel r)

$\omega_1 = 2\varepsilon$ (Außenwinkel im Dreieck)

$\omega_1 = \omega_2$ (gleichschenkl. Dreieck!)

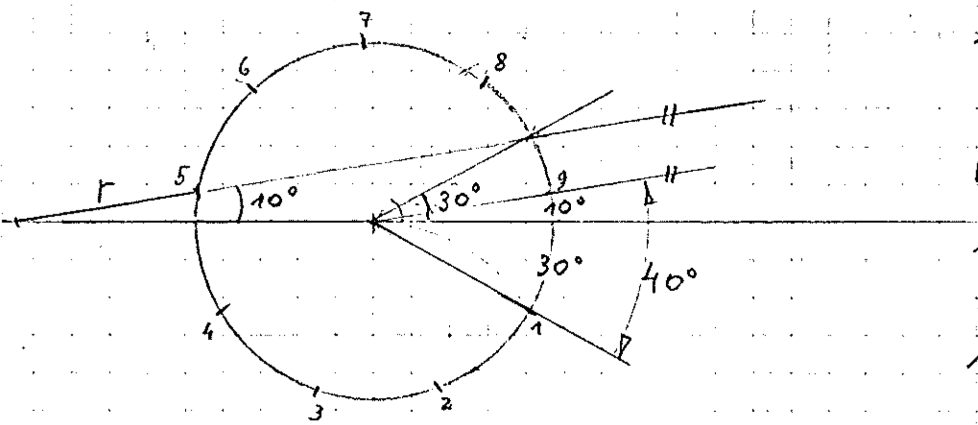
$\omega_2 = \omega_2$ Z-Winkel

also ist $\omega_3 + \varepsilon_3 = 3 \cdot \varepsilon$

Anwendung zur Konstr. des regelm. 9-ecks: Wir brauchen $\frac{360°}{9} = 40°$, das ist $\frac{1}{3}$ von 120°. Wir spalten 90° ab:

$$\frac{120}{3} = \frac{90° + 30°}{3} = 30° + 10°$$

Wir konstr. also $\frac{1}{3}$ von 30° und addieren das Ergebnis zu 30°. Diese Sehne von 40° läßt sich 9 mal am Umfang abtragen.



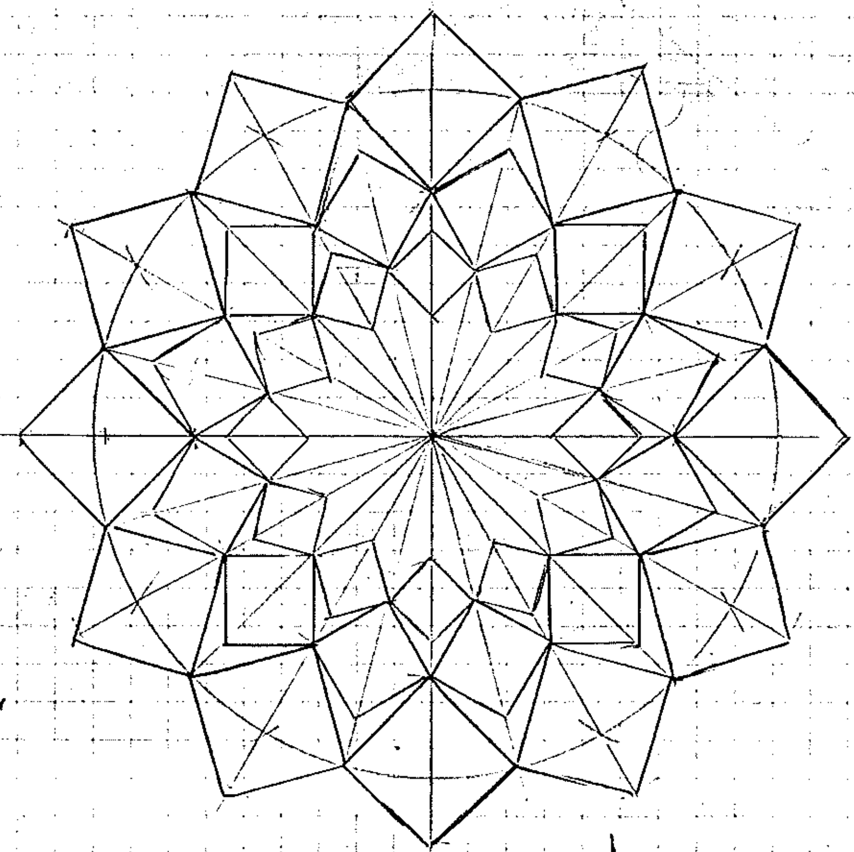
8. Tag: Der Unterschied der 6., 7. und 8. Klasse läßt sich in der Geometrie gut hervorheben:

6. Kl: aus dem Bildhaften zum Wissenschaftlichen
7. Kl: Praktische Aspekte: Wozu ist das gut? Übergang zum Dreidimensionalen durch die Perspektive
8. Kl: Praktische Raumformen, Beispiele aus dem Leben.

6. Klasse: Teilung des Kreises, regelmäßige Vielecke, Stern-Vielecke
Bilden von geom. Reihen aus den Vielecken heraus (ähnliche Verkleinerungen z.B.) Übergang vom Regelmäßigen zum Unregelmäßigen durch Metamorphose der Form.

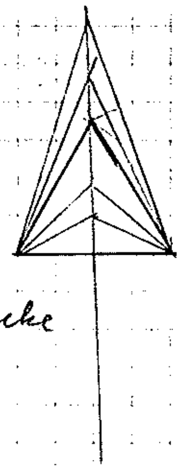
Beispiel aus den geometr. Reihen:

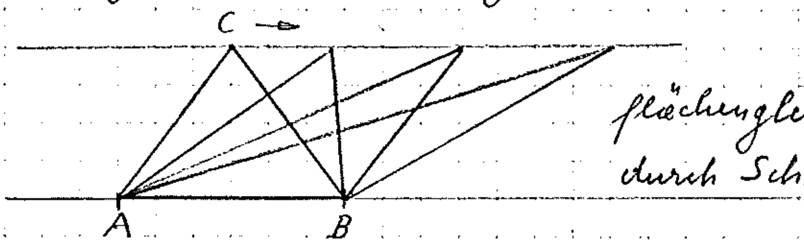
Die vielen Quadrate lassen sich durch bloßes Parallel=verschieben zeichnen, wenn man zuerst 24 gleichmäßig ver=teilte Durchmesser des Kreises zeichnet.



Man kann diese Figur nachträglich noch schachbrettförmig oder spiralig schwärzen oder färben. (ausfüllen)

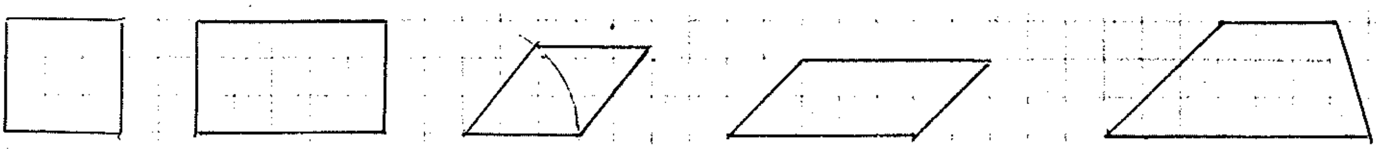
Regelmäßige und unregelmäßige Dreiecke:
Vom gleichseitigen zum gleichschenkligen Dreieck:





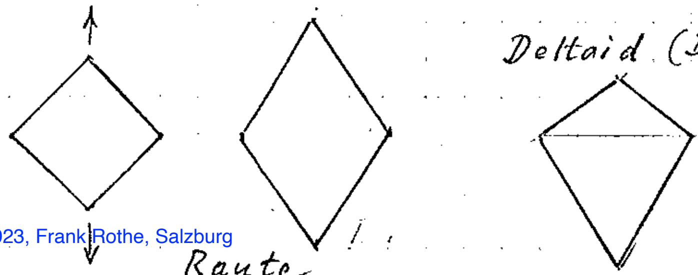
flächengleiche Dreiecke durch Scherung

Verschiedene Formen der Vierecke: aus dem Quadrat entwickeln.



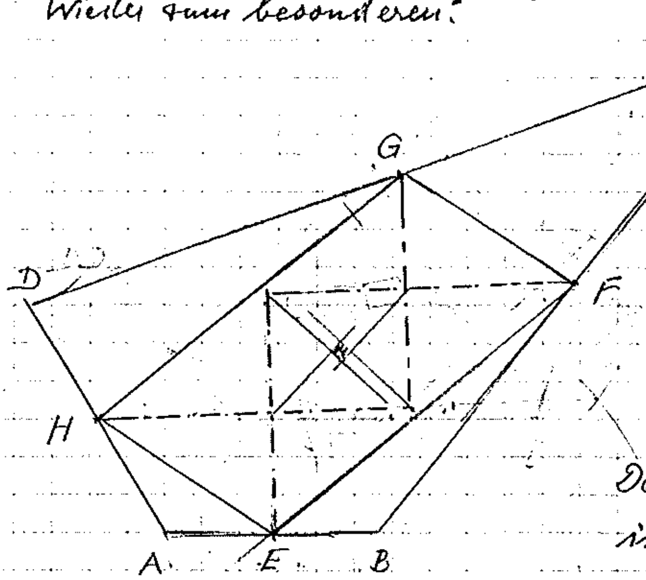
Rechteck Raute Parallelogramm Trapez

Deltoid (Drachen-Viereck)



Raute

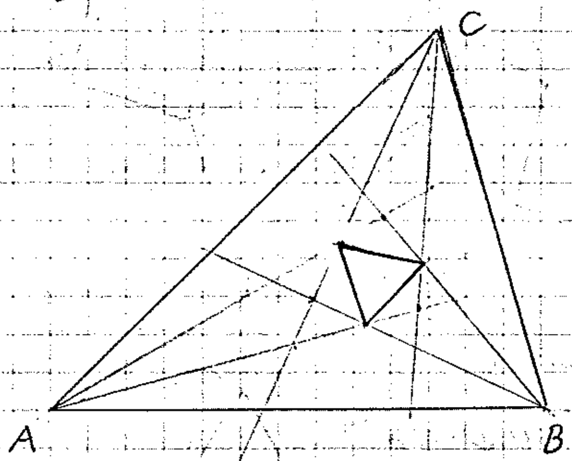
Wie kommt man vom allgemeinen (unregelmäßigen) Viereck wieder zum besonderen?



allgemeines Viereck ABCD
Halbierungspunkte der Seiten bilden ein Parallelogramm EFGH
Dessen Winkelhalbierende umschließen ein Rechteck, dessen Winkelhalbierende ein Quadrat.

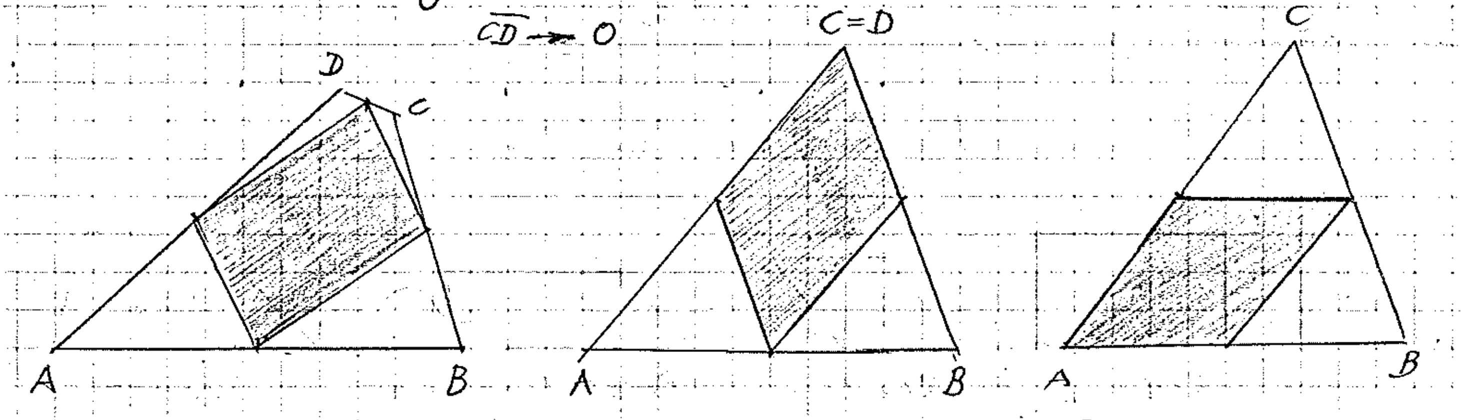
Das Spiel zwischen regelmäßig und unregelmäßig ist für die Kinder wichtig.

Nun gehen wir von einem allgemeinen Dreieck aus und teilen jeden Winkel in 3 gleiche Teile; (das kann auch mit dem Winkelmesser geschehen)



Diese 6 Geraden umschließen ein Sechseck, von dem 3 Ecken ein gleichseitiges Dreieck bilden.

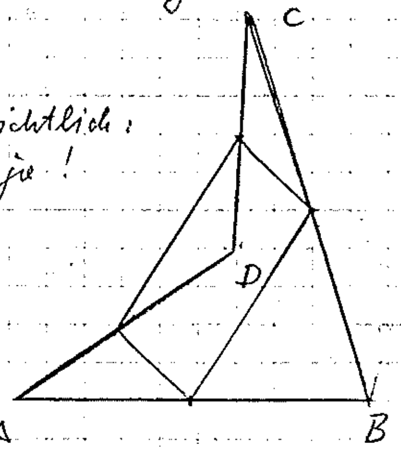
Als Variante zum oberen Beispiel (Viereck) lassen wir nun eine der 4 Seiten nach Null gehen:



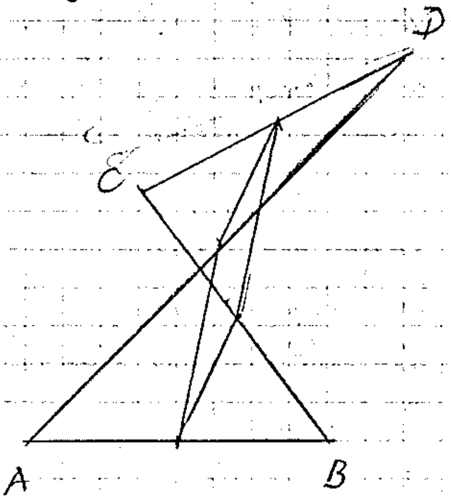
Flächengrößen? Das Parallelogramm hat stets die halbe Dreiecksfläche. Warum?

Entsteht auch bei einem nicht konvexen, also eingebuchteten Viereck ein Parallelogramm?

offensichtlich: ja!



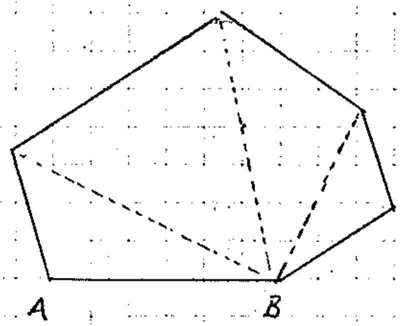
und bei einem überschlagenen Viereck? Ja!



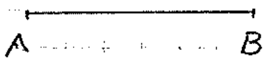
7. Klasse:

Jetzt muß man eine ganz andere Note anschlagen, ja nicht an das anknüpfen, was man unmittelbar vorher in Kl. 6. gemacht hat. Denn was zur 6. Kl. gehört und dort mit ganzem Herzen aufgenommen wurde, das ist in der 7. Kl. eine Enttäuschung. Es war so schön, daß es sich nicht wiederholen läßt. Also gilt jetzt eine ganz andere Tonart:

Kongruentes (deckungsgleiches) Übertragen von Figuren, Vergrößern und Verkleinern (Strahlensätze, zentrische Streckung u.a.), Pläne müssen in verschiedenem Maßstab gezeichnet werden. Praktisches Leben!



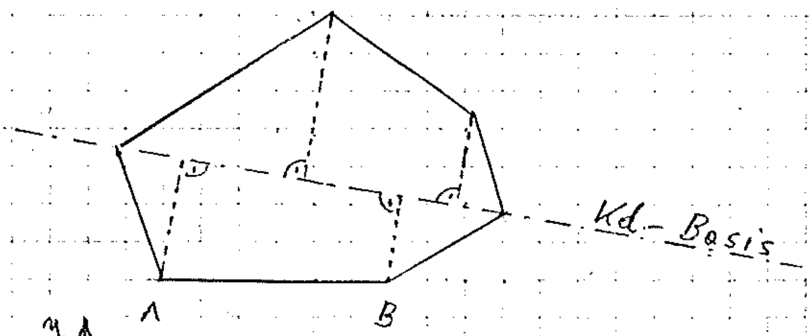
Diese Grundstücksform ist in einen anderen Plan zu übertragen. Die Basis ist gegeben.



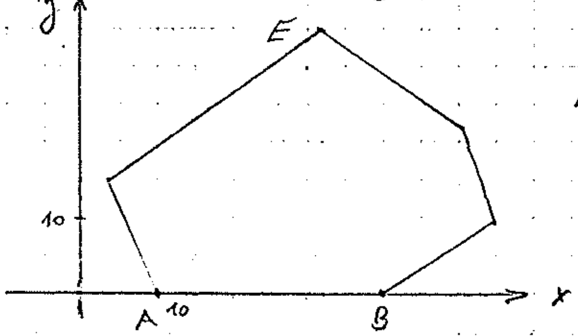
1) in Dreiecke zerlegen: Kein praktische Handwerksmaße handhaben

oder 2) Koordinatenmethode:

Koord.-Basis wählen und die Lote auf diese von den übrigen Punkten einzeichnen, dann die nötigen Strecken abmessen: Strecken auf der Basis und Längen der Lote.



oder 3) Koordinatensystem außerhalb wählen und x, y für jeden Punkt messen:



E: x = 32 mm
y = 35 mm

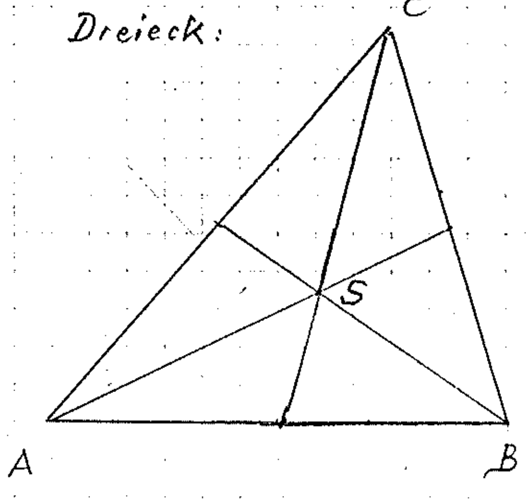
Fall 1) Ein schäbiger Rest der schönen Diagonalen des 24-Ecks z.B. bleibt hier noch stehen. Das Leben ist ein schäbiger Abglanz der Urbilder. Diese glänzen noch alle der Kindheit nach. In unseren Schulen besteht leicht die Gefahr, daß das stark Künstlerische zu lange mitgeführt wird und die Kinder der Mittel- und Oberklassen zu lange als Kinder behandelt werden. Wenn der Lehrer zu oft sagt: Das ist wunderbar, das ist schön, dann kommen die Kinder oft mit den häßlichsten Ausdrücken, ganz ablehnend. Die Kinder finden: Das ist nicht mehr am Platze. Der Lehrer muß diesen Kindern vorauseilen mit dem Verlassen dieser Dinge des Kindheitsglanzes. Der Goldhintergrund darf über die Schwelle der 6. Klasse nicht hinausgetragen werden. Wir Lehrer müssen den Umschwung <u>vor</u> den Kindern machen. Die Wörter schön, wunderbar, herrlich müssen aus dem Wortschatz des Lehrers dieser Altersstufe gestrichen werden. Das paßt nicht mehr. Taktgefühl gegenüber der nüchternen Lebenshaltung ist zu wahren. Nüchterner Ton wird vorgezogen. Die Kinder strecken sonst die Zunge heraus zu solchen Ausdrücken des Lehrers.

Zur kongruenten Übertragung: Die Kongruenzsätze stecken da drin. Zuerst übertragen nach den 4 Methoden*), dann die Gleichheit zeigen, daraus die Kongruenzsätze entwickeln. Bei der Ähnlichkeit ebenso (Ähnlichkeitssätze: Dreiecke sind ähnlich, wenn ....)

Perspektive in Klasse 7: Nicht abzeichnen, sondern aus sich entwickeln lassen.

Die Geometrie der 7. Klasse kann man auch mit der Mechanik verbinden: Das Gebiet der Schwerpunkte ist diesem Alter wie auf den Leib geschrieben. Man kann die Konstruktionen mit konkreten Experimenten verifizieren.

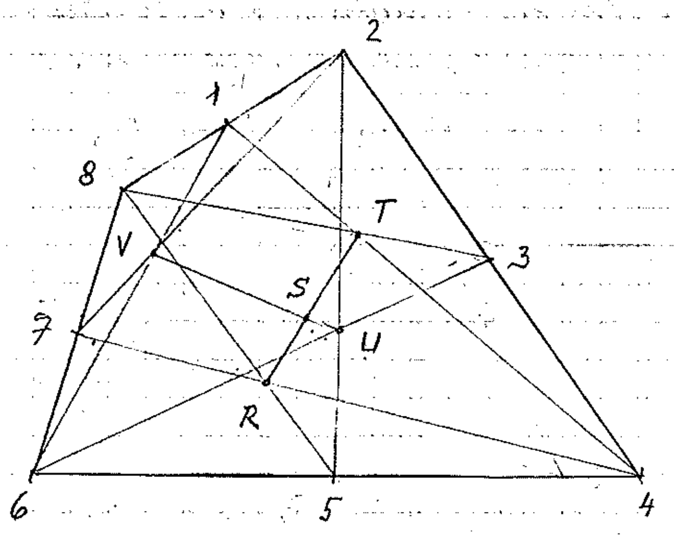
Dreieck:



Verbinde die Halbierungspunkte der Dreiecksseiten mit dem jeweils gegenüber liegenden Eckpunkt. (Schwerlinien) Ihr Schnittpunkt ist der Schwerpunkt S des Dreiecks. Dreieck aus Karton oder Sperrholz ausschneiden, mit S auf einer Nadelspitze schweben lassen. Verschiedenste Dreiecke probieren.

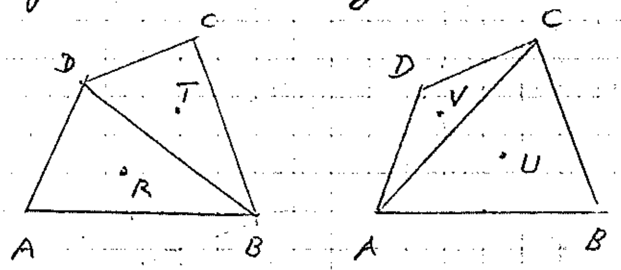
*) die den 4 Kongruenzsätzen entsprechen.

Schwerpunkt eines Vierecks:



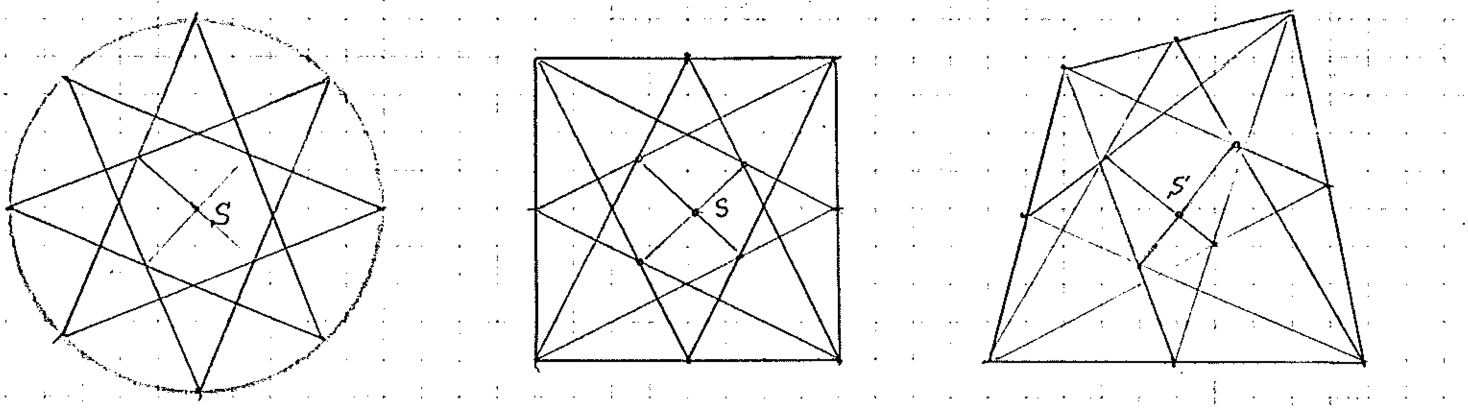
2, 4, 6, 8 sind Eckpunkte des Vierecks
1, 3, 5, 7 Halbierungspunkte der Seiten

Denke dir das Viereck auf 2 Arten in 2 Dreiecke zerlegt durch jeweils eine Diagonale:



Konstruiere die Schwerpunkte R und T der Dreiecke ABD und BCD und verbinde Sie; ebenso die Schwerpunkte U und V der Dreiecke ABC u. ACD. Dann ist der Schnittpunkt der Linien RT und UV der Schwerpunkt S des Vierecks. RT und UV sind also Schwerlinien des Vierecks, die man auf eine Messerschneide legen kann, um das Viereck schweben zu lassen. Mit S auf einer Nadel schwebt es auch.

Wir erinnern uns an die Stern-Vielecke:



hier ist S natürlich auch Schwerpunkt

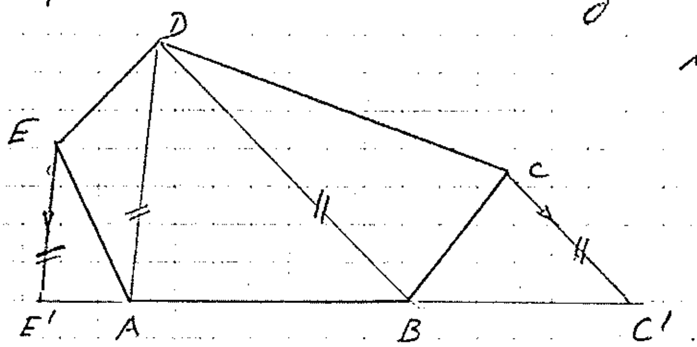
Variante mit dem Quadrat

Wieder nur eine Variante: allgem. Viereck

Nach dieser Betrachtung werden dem Kind seine ursprünglichen Zeichnungen aus der (5.) 6. Klasse nicht kindlich erscheinen, sondern urbildlich. Die Schönheit hatte also etwas in sich. Es war nicht bloß Schönheit. Durch diese Behandlung wird die Wunde geheilt, die in den Seelen der Kinder entstand, als sie von ihrer Goldgrund=Welt Abschied nehmen mußten. Der Weg führte sie eben von Schönheit, Bewunderung, Kunst zu Wissenschaft, Praxis Technik. Wir sollten keine Hiebe austeilen von der Wissenschaft zur Kunst und umgekehrt, sonst ist ein Riß in der Menschlichkeit vorhanden. Der Schwerpunkt des Vertrauens der Kinder liegt auf der realistischen Welt in der 7. und 8. Klasse.

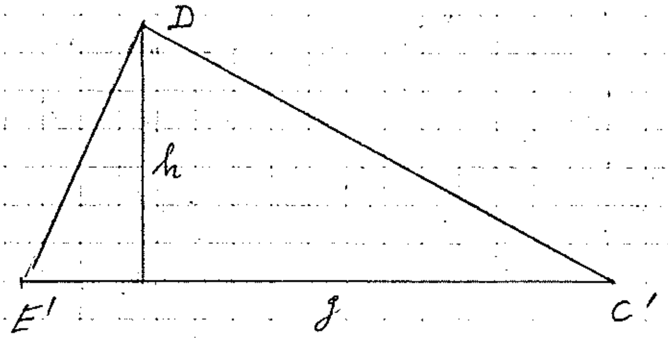
In die 7. Klasse gehört noch die ganze Flächenverwandlung bis zum Quadrat. Lieber an den humanistischen Fächern sparen und in den realistischen Fächern mehr geben; Satz von Thales u. a.

Beispiel zur Flächenverwandlung: Verwandle das Fünfeck ABCDE in ein flächengleiches Quadrat:

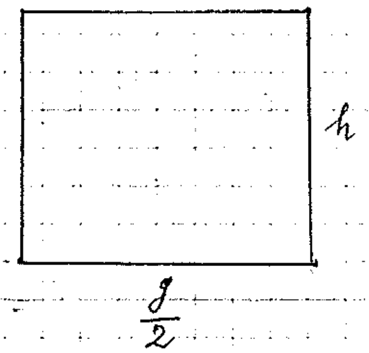


1. Schritt: $E \rightarrow E'$
$C \rightarrow C'$

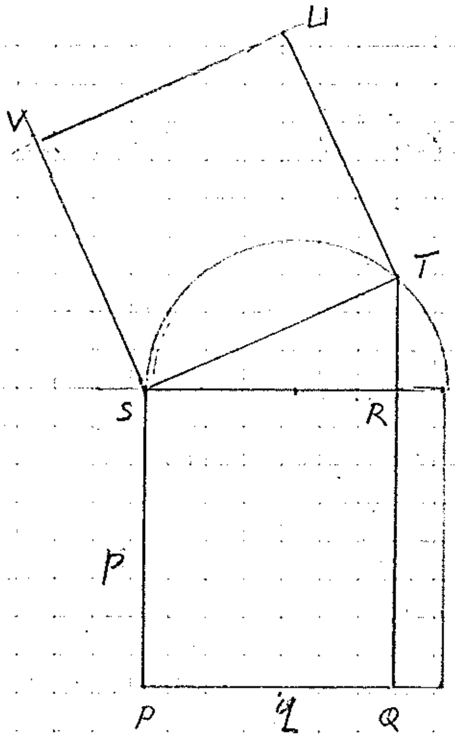
Da $\triangle BCD = \triangle BC'D$ ist und $\triangle AED = \triangle AE'D$, so entsteht jetzt das Dreieck $E'C'D$.



2. Schritt: Dieses Dreieck ist flächen=gleich mit einem Rechteck, das gleiche Grundlinie und halbe Höhe hat, oder halbe Grundlinie und gleiche Höhe:

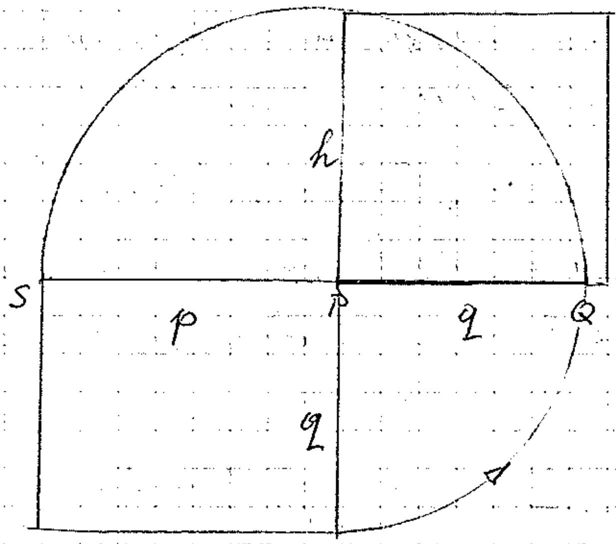


3. Schritt: Zur Verwandlung des Rechtecks in ein Quadrat kann man den Pythag. Satz oder den Höhensatz verwenden, oder den Sehnensatz im Kreis.



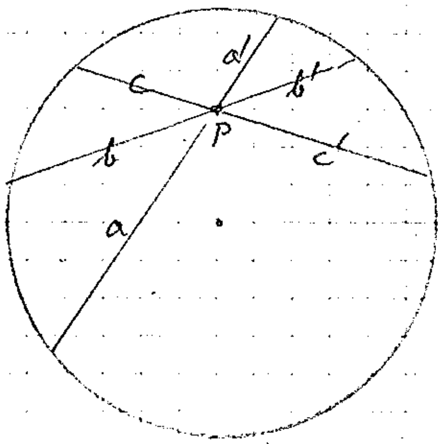
$\square\, PQRS = \square\, STUV$

Pythagoras, Euklid



$p \cdot q = h^2$

Höhensatz

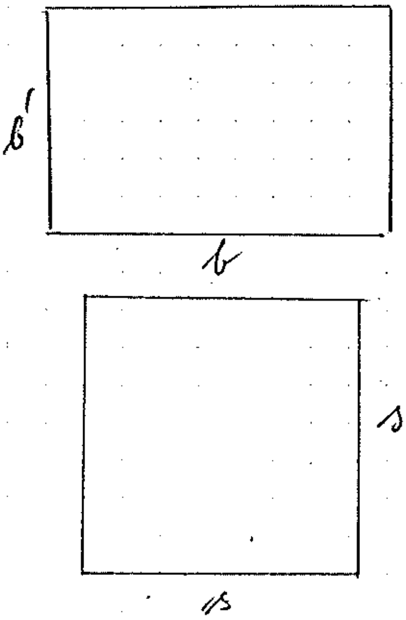


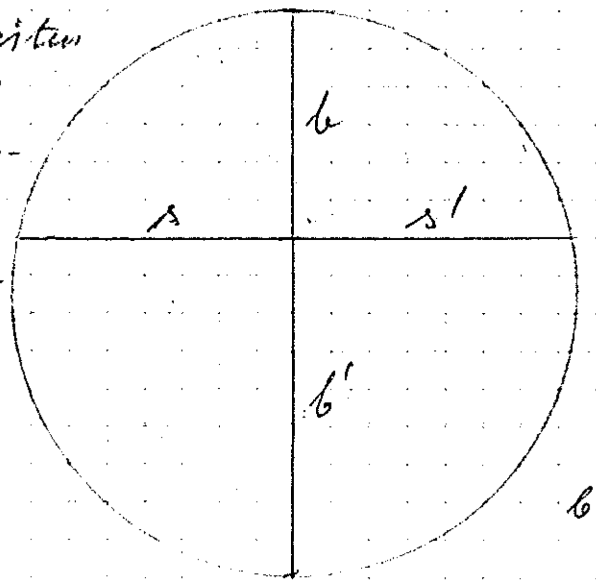
Sehnensatz: Das Produkt der Sehnenabschnitte aller Sehnen durch einen Punkt P ist gleich:

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = \ldots$$

Wählt man eine Sehne mit gleichen Abschnitten, so ergibt sich eine Quadratfläche

Verwandle das Rechteck mit den Seiten b, b' in ein flächengleiches Quadrat





$s = s'$ für die Quadratseite, denn $b \cdot b' = s^2$

8. Klasse:

Reguläre Körper aus Zeichenpapier herstellen! Für 8. Klasse richtig,
(Kantenmodelle aus Stroh)   Netze zeichnen!

Pyramiden, Prismen, Kristall-Körper; staunen lassen.

Kugel: die (gekrümmte) Fläche einer Halbkugel ist doppelt so groß wie die Fläche des Kreises, auf dem sie steht.

Herleitung ist erst später möglich, aber man kann es zur Kenntnis nehmen.

Das Urteil: Das ist schön" oder das ist interessant, bemerkenswert, .. muß jetzt individuell kommen; nicht von außen.

Langsam überführen bis zu dem Punkte, wo man sich mit Begeisterung für das Schöne einsetzt, auch gegen die Klassengemeinschaft. Das ist der Entwicklungsweg der Oberklassen.

Auch solche Mut-Eigenschaft ist Ziel einer Oberklasse.

Zur 8. Klasse wäre noch viel zu sagen, doch reichte die Zeit nur für einige Andeutungen.