

Anspruchsvolle Dreierausdrücke zum selbstständigen Lernen

von Frank Rothe

Das vorliegende Übungsblatt ist als Anregung gedacht, die Sie in Ihrer Klasse in unterschiedlicher Weise umsetzen können.

Entwickelt habe ich es für SchülerInnen denen Mathematik leicht fällt und die sich gerne an etwas Kniffligeren versuchen würden...

- a) Zum **selbstständigen Lernen** können Sie den Schülern die Übungsblätter (S.2-5) geben. Die SchülerInnen erarbeiten die Inhalte und können sich anschließend an den Übungen versuchen. Die Übungen selber sind differenziert gestaltet. Zum Ende hin wird zunehmend mehr kreativer und bewusster Umgang mit den Inhalten erforderlich.
- b) Zum **mathematischen Forschen** stellen Sie den SchülerInnen zunächst nur eine Aufgabe wie z.B.: $38a^2 - 67a + 15 = (\dots \dots \dots) (\dots \dots \dots)$ Wie lauten die Klammern? Können die SchülerInnen die Aufgabe lösen? Wenn ja... prima! Dann geben Sie ihnen direkt die Übungen (S. 5). Andernfalls böte sich als erster Tipp die etwas leichter Aufgabe:
 $14a^2 + 31a + 15 = (\dots \dots \dots) (\dots \dots \dots)$ an. Brauchen die SchülerInnen noch mehr Tipps, liefern Sie die den Text mit den Beispielen nach (S.2-4). Anschließend sind die Übungen (von S. 5) an der Reihe.

So, nun wünsche ich Ihnen viel Freude und Spannung beim Rechnen!
Berichten Sie mir doch bei Gelegenheit von Ihren Erfahrungen! Würde mich sehr freuen.

Frank Rothe

p.s: Wie kommen Sie selber mit den Aufgaben zurecht? Nur Mut... auf geht's!

Anspruchsvolle Dreierausdrücke

Ausmultiplizieren zweier Klammern führt zu einem Dreierausdruck

Beispiel 1:

Das kennst du....

$$\begin{aligned}(a+5)(a+2) &= a \cdot a + a \cdot 2 + 5 \cdot a + 5 \cdot 2 && (\dots \text{ in Gedanken} \dots) \\ &= a^2 + \underbrace{2a+5a} + 10 && (\text{Notiere!}) \\ &= a^2 + 7a + 10 && (\text{Notiere das Ergebnis!}) \\ &&& \Downarrow \\ &&& 10 = 5 \cdot 2 \rightarrow \text{Produkt der beiden} \\ &&& \text{hinteren Zahlen}\end{aligned}$$

... ein einfacher Dreierausdruck

Beispiel 2:

Hier werden die Klammerausdrücke anspruchsvoller...

$$\begin{aligned}(7a+5)(3a+2) &= 7a \cdot 3a + 7a \cdot 2 + 5 \cdot 3a + 5 \cdot 2 && (\dots \text{ in Gedanken} \dots) \\ &= 21a^2 + \underbrace{14a+15a} + 10 && (\text{Notiere!}) \\ &= 21a^2 + 29a + 10 && (\text{Notiere das Ergebnis!}) \\ &&& \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ &&& 21 = 7 \cdot 3 \rightarrow \text{Produkt der} \\ &&& \text{beiden vorderen} \\ &&& \text{Zahlen} \\ &&& 10 = 5 \cdot 2 \rightarrow \text{Produkt der beiden} \\ &&& \text{hinteren Zahlen}\end{aligned}$$

... auch ein Dreierausdruck.... aber nicht mehr so einfach! Aber hinten und (nun auch?!) vorne stehen wieder die Produkte!

Frage: Kannst du das Ergebnis auch ohne Zwischenschritte zu notieren hinschreiben? Wie kommst du auf den mittleren Summanden?

Faktorisieren eines anspruchsvollen Dreierausdrucks

Faktorisiere einen anspruchsvollen Dreierausdruck.. Erinnerst du die Regeln für die Rechenzeichen (RZ) für die beiden Klammern? Hier ist ein Beispiel für einen anspruchsvollen Dreierausdruck....

$$14a^2 + 31a + 15 = (\dots \dots \dots) (\dots \dots \dots)$$

1.Schritt:

2. + => beide RZ sind +!

↑

14a² + 31a + 15 = (... ..) (... ..)

↓

14 = 1 · 14
= 2 · 7

MÖGLICHE
Faktoren für
die vorderen
Zahlen

↑

1. + => beide RZ sind gleich!

15 = 1 · 15
= 3 · 5

MÖGLICHE
Faktoren für
die hinteren
Zahlen

... nur... welches vordere (Faktoren-)Paar passt zu welchem hinteren? Versuche es!

2. Schritt:

Erster Versuch mit 1 und 14...

1
14

+1	(14)	29	(15)	+15
15	(210)	211	(1)	1
3	(42)	47	(5)	5
5	(70)	73	(3)	3

Neuer Versuch mit 2 und 7...

2
7

+1	(7)	37	(30)	+15
15	(105)	107	(2)	1
3	(21)	31	(10)	5

Das ist es!

Nichts geht!.. Neuer Versuch....

Frage: Verfolge aufmerksam diese Versuche. Was haben die Versuche mit dem mittleren Summanden des Dreierausdrucks zu tun?

3. Schritt:

Kannst du die Klammern anschreiben?

$$14a^2 + 31a + 15 = (\dots \dots \dots)(\dots \dots \dots)$$

$$14a^2 + 31a + 15 = (7a \dots \dots)(2a \dots \dots) \quad \text{Die vorderen Zahlen sind 2 und 7... natürlich jeweils mit a.}$$

Die hinteren Zahlen sind 3 und 5.

$$14a^2 + 31a + 15 = (7a \dots \dots)(2a \dots 3) \quad \text{Die 3 wurde mit der 7 multipliziert, dann muss die 3 in der anderen (=zweiten) Klammer stehen...}$$

$$14a^2 + 31a + 15 = (7a \dots 5)(2a \dots 3) \quad \dots \text{ und die 5 in der ersten Klammer.}$$

$$14a^2 + 31a + 15 = (7a + 5)(2a + 3) \quad \text{Die Rechenzeichen in den Klammern waren beide +!}$$

4.Schritt:

Überprüfe die Klammern:

$$\begin{aligned} (7a + 5)(2a + 3) & \stackrel{?}{=} 7a \cdot 2a + 7a \cdot 3 + 5 \cdot 2a + 5 \cdot 3 \quad (\dots \text{ in Gedanken} \dots) \\ & = 14a^2 + \underbrace{+ 21a + 10a} + 15 \quad (\text{Notiere!}) \\ & \stackrel{!}{=} 14a^2 + 31a + 15 \quad (\text{Notiere das Ergebnis!}) \end{aligned}$$

Frage: An welchen Stellen in diesem Beispiel spielen die Rechenzeichen in den Klammern eine Rolle? Es gibt eine Stelle an der ich die Rechenzeichen (hier sind es ja + und +) einmal mitgeschrieben und dann weggelassen habe, weil sich bei + und + nichts verändert. Welche Stelle ist dies?

Übungen

1. Ausmultiplizieren und Faktorisieren gemischt!

- a) $(2a + 5)(9a + 1) =$
- b) $77a^2 + 47a + 6 =$
- c) $(10a + 3c)(a + 5c) =$
- d) $39c^2 + 19cd + 2d^2 =$

2. ...und achte besonders auf die Rechenzeichen!

- a) $(a - 4)(7a - 5) =$
- b) $27m^2 - 30m + 7 =$
- c) $(2n + 3)(17n - 6) =$
- d) $4a^2 - 8a - 21 =$
- e) $38a^2 - 67ab + 15b^2 =$

3. Faktorisiere!

- a) $3x^4 + 23x^2 - 8 =$
- b) $16a^3 - 32a^2 + 60a =$
- c) $e^2f - f^2 + 2e^4 =$
- d) $6v^2 + 3vw - 5w(2v + w) =$

Bei dieser Aufgabe gibt es mehrere –deutlich unterschiedliche – Lösungswege. Finde zwei!

4. Du bist dran!

- a) Ergänze: $(4a + \dots)(\dots \dots \dots) = 36a^2 \dots \dots + 3$
- b) Überlege dir selber drei „Ergänze-Aufgaben“ – eine leichte – eine mittel schwere – und eine anspruchsvolle. Erläutere kurz nach Gesichtspunkten deine Aufgaben leicht, mittel bzw. anspruchsvoll sind.