Schule zwischen Persönlichkeitsvermittlung und Wissensvermittlung

(Bedeutung von relativen Extrema und Nullstellen für Funktionen)

von Frank Rothe

Kurzfassung von "Schule zwischen Persönlichkeitsentwicklung und Wissensvermittlung"

(Bedeutung von relativen Extrema und Nullstellen für Funktionen)

Ist die Schule ein Ort der Wissensvermittlung oder der Persönlichkeitsbildung? Beide Aspekte sind gerechtfertigt und lassen sich sogar gewinnbringend verbinden. Dies wird exemplarisch anhand des Goethe'schen Typusbegriffes und des Begriffspaares potentiell-aktuell in ihrer Anwendung auf ganzrationale Polynomfunktionen gezeigt. Wie läßt sich neben dem allgemein üblichen Stoff ergänzend ein Überblick über die geometrische Formvielfalt von Graphen bzw. die algebraische Formvielfalt von Polynomfunktionen gewinnen? Es lassen sich in beiden Bereichen zugrundeliegende Gesetzmäßigkeiten bzw. die Sachverhalte ordnende bewegliche Ideen aufzeigen. Zentral hierbei ist der Ansatz die Form eines Graphen entweder mit Hilfe seiner Nullstellen oder durch die Anzahl seiner relativen Extrema zu beschreiben (nullstellenbezogene und extremabezogene Formbeschreibung). Hiermit zusammen hängen Begriffe wie Nullstellen einer Funktion, Vielfachheit einer Nullstelle, Grad einer Funktion und der Fundamentalsatz der Algebra. Sie erscheinen durch die extremabezogene Formbeschreibung in einem neuen Licht. Beide Formbeschreibungsmöglichkeiten sind sinnvoll und ergänzen sich. Ihr Zusammenspiel ist leicht durch die Differentialrechnung einzusehen. Der Inhalt des Beitrages kann sowohl für den rein mathematisch-fachlich als auch für den eher pädagogisch Interessierten einige Anregungen enthalten.

Schule zwischen Persönlichkeitsbildung und Wissensvermittlung

(Bedeutung von relativen Extrema und Nullstellen für Funktionen)

1 Einleitung

Heutzutage meint man leicht , daß es im Schulunterricht zwei unterschiedliche Auffassung , welche Rolle er dem Heranwachsenden gegenüber besitze , gebe. Die einen sehen die Schule als Hilfe für die Persönlichkeitsentwicklung des Individuums, die anderen sehen in ihr eher eine Institution zur Wissensvermittlung. Jedoch schließen sich beide Sichtweisen nicht aus. Man frage sich: Welchen menschlichen Reifestand haben meine Schüler im Augenblick und welche Fragen bzw. Probleme sind für sie aktuell? Offensichtlich sind dies pädagogische Gesichtspunkte. Interessant wird nun die Beantwortung der Frage: Durch welchen Unterrichtsstoff entspreche ich ihrem Reifestand und kann ihre momentanen menschlichen Probleme und Fragen ansprechen? Hier geht es um den Stoff. Dabei ist nicht gemeint, daß dieser eine minderwertige Rolle spielen soll. Die Heranwachsenden werden nur etwas für sich aus dem behandelten Stoff gewinnen können , wenn sie ihn beherrschen bzw. - im Sinne der drei Wissensstufen "Kennen, Können, Künden" wirklich können. Nehmen wir z.B. die 11. Jahrgangsstufe. In diesem Alter sind die Jugendlichen sehr sensibel für tiefere soziale Beziehungen - für Freundschaften. Sie sind auf der Suche nach sich selber. "Dasjenige was ich tue, bin ich das , ist das schon alles oder ist dahinter noch etwas anderes verborgen." Zudem besitzen sie die Fähigkeit eines ausgeprägten Denkens insbesondere die Fähigkeit , Ideen gedanklich zu erfassen (z.B. was ist Freudschaft).

Goethe entwickelte erstmals den Typusbegriff(im Zusammenhang mit der Evolution) - einer hinter den Erscheinungen stehenden und letztere als "geistiges Band" zusammenfassende Idee [3, S.57 f]. Auch das Begriffspaar potentiell-aktuell im griechenischen Sinne[1] besitzt etwas von dieser Qualität. Wenn man beides als Hilfestellung für den jungen Menschen betrachtet, ist es erforderlich , sie mit diesen Begriffen vertraut zu machen. Denn die Gestaltpsychlogie weißt darauf hin, daß man nur sieht, wofür man auch Begriffe hat. Inwiefern der Jugendliche diese Begriffe tatsächlich auf sein Leben anzuwenden vermag, muß er selber beurteilen. Welcher mathematische Stoff ist geeigent , um an ihm die genannten Begriff zu

---

[1] aktuell: Wirk-lichkeit einer Kraft; potentiell: Möglichkeit einer Kraft zu wirken; hierzu vgl. insbesondere [2, S.191 f und S.193 f] . Wie könnte man sich das Zusammenspiel dieser beiden Begriffe veranschaulichen? Man stelle sich eine Kastanie in einem Wasserstrudel vor. Wenn sich dieser nur schnellgenug dreht , wird man die Kastanie nicht erkennen können. Und doch gibt es sie. Sie ist potentiell-existent. Kommt das Wasser mit der Zeit zur Ruhe , kann man die Kastanie allmählich erkennen. Sie tritt in Erscheinung , sie wirkt , sie ist aktuell-existent.

entwickeln? Hierfür bieten sich die Polynomfunktionen und der Fundamentalsatz der Algebra an.

Genauer formuliert ist das pädagogische Ziel , den jungen Menschen die Begriffe "Typus" und "potentiell-aktuell" für ihre persönliche Entwicklung zu vermitteln. Erreicht soll dies werden durch die Bearbeitung der Fragen: Wie lassen sich ganzrationale Polynomfunktionen bzw. Linien, die Graphen solcher Funktionen darstellen, beschreiben? Läßt sich ein Überblick über die zahlreichen Formen der Graphen bzw. die algebraische Vielfalt der Terme von (ganzrationalen) Polynomfunktionen gewinnen? Fachliche Vorraussetzungen für das Verständnis sind: Kennen von Polynomfunktionen und deren Graphen, der Begriff der Vielfachheit und seiner Bedeutung für den Graphen, eine einfache Art der Kurvendiskussion etwa im Sinne von [1, vgl.S. 58] , der Begriff des Grades einer Polynomfunktion , komplexe Zahlen (evtl. die Locher'sche Pfeildarstellung komplexer Punkte [4]). Bei der folgenden Betrachtung sei die Definitionsmenge immer D=R. Die Vorgehensweise ist die: in der Geometrie werden die Gedanken anschaulich entwickelt und anschließend deren Entsprechung in der Algebra aufgesucht[2].

2 Vorbetrachtung

Beginnen wir mit den elementarsten Linien. Dies sind die Geraden. Den Geraden entsprechen die einfachsten Polynomfunktionen (ersten Grades). Anschaulich kann man von einer Geraden zu komplizierteren Linien aufsteigen , indem man sie *möglichst einfach* verbiegt. Da wir nur Polynomfunktionen betrachten , stellen diese Kurven Parabeln dar. Der Grad der Funktion hat sich (um eins) auf zwei erhöht. Wie lassen sich die Formen beider Linien beschreiben. Üblicherweise betrachtet man die Schnittpunkte der Linien mit der x-Achse. Dies kann bei der Parabel zu Schwierigkeiten führen , weil z.B. der Graph von $f(x) = x^2 + 1$ keinen Schnittpunkt mit der x-Achse besitzt. In R ist das "Schnittpunktkriterium" für die Form einer Linie nicht ausreichend. Was ist es denn anschaulich, was eine Gerade von einer Parabel unterscheidet? Was hat letztere, was erstere nicht besitzt? Die Parabel ist gekrümmt - die Gerade nicht. Anders formuliert: Wegen D=R weist die gleichmäßig verbogene Kurve (die Parabel) genau ein relatives Extremum auf - die Gerade keines. Neben der Möglichkeit die Form eine Linie durch ihre Anzahl und Art von "Schnittpunkten" mit der x-Achse d.h. eine Polynomfunktion durch die Anzahl von Nullstellen und deren Vielfachheit zu beschreiben, kann eine Linie auch durch die Anzahl ihrer relativen Extrema charakterisiert werden. Eine Gerade ist der Graph von denjenigen Polynomfunktionen , die kein relatives Extremum besitzen. Eine Parabel ist der Graph von denjenigen Polynomfunktionen , die genau ein relatives Extremum besitzen. Die erste

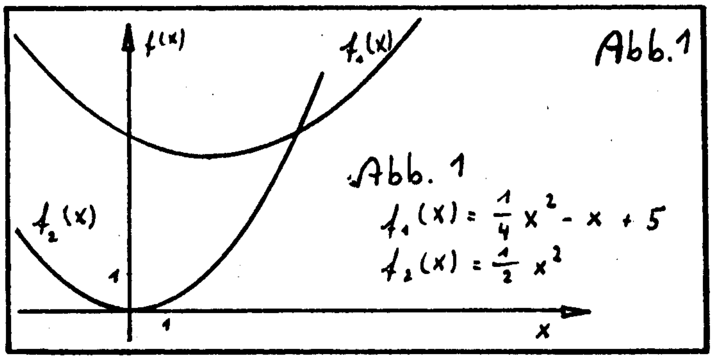
---

[2] Wegen der engen Verbindung im Text zwischen Geometrie und Algebra werden auch die Ausdrücke "Kurve", "Linie" und "Graph" nicht immer mathematisch exakt getrennt sondern so benutzt , wie es im momentanen Kontext am geeignesten erscheint.

Moglichkeit zur Beschreibung der Form ist im folgenden gemeint , wenn von der "nullstellenbezogenen Formbeschreibung" gesprochen wird. Die nullstellenbezogene Formbeschreibung bezieht sich unmittelbar auf das Koordinatensystem. Die "extremabezogene Formbeschreibung" meint die zweite Möglichkeit. Sie bezieht sich zunachst stärker auf die geometrische Form denn auf das Koordinatensystem.

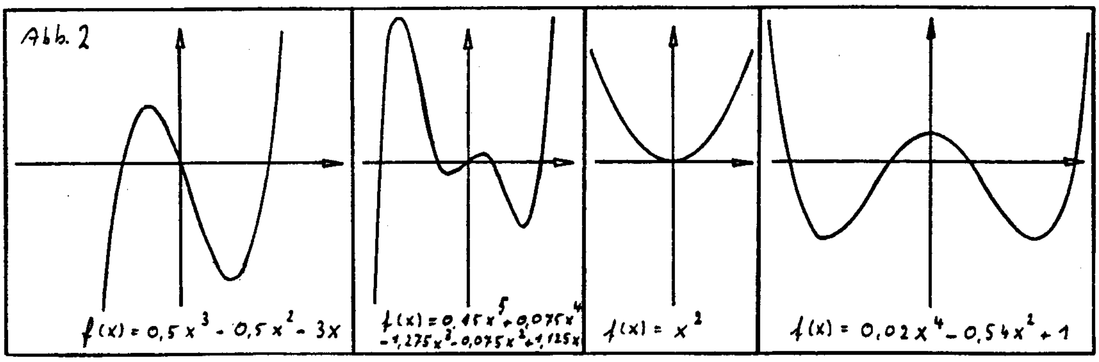
3 Extremabezogene Formbeschreibung

Betrachten wir zunächst die beiden folgenden Linien (Abb.1). Beide Linien stellen Parabeln dar. Wie lassen sich sich beschreiben?



Abgesehen von verschiedenen Lagen besitzen sie eine große Ähnlichkeit in der Form. Beide haben jeweils ein Extremum. Alleine die Steigung der einen Parabel ist großer als die der anderen. Diese äußere Formverwandtschaft spiegelt sich in den zugehörigen Funktionstermen wieder. Beide Funktionen sind vom Grad 2.

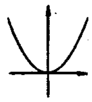
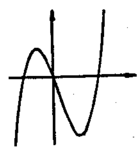
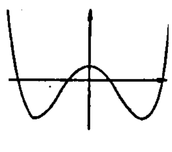
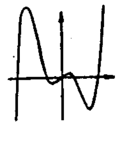
Neben solchermaßen ähnlichen Linien existieren noch andere ganz verschiedener äußerer Gestalt z.B.:



Aufgabe: Beschreibe die Form der Linien (Abb.2) und versuche sie möglichst sinnvoll zu ordnen. Zeichne die nächsten sich an die letzte Linie anschließenden Linie(n).

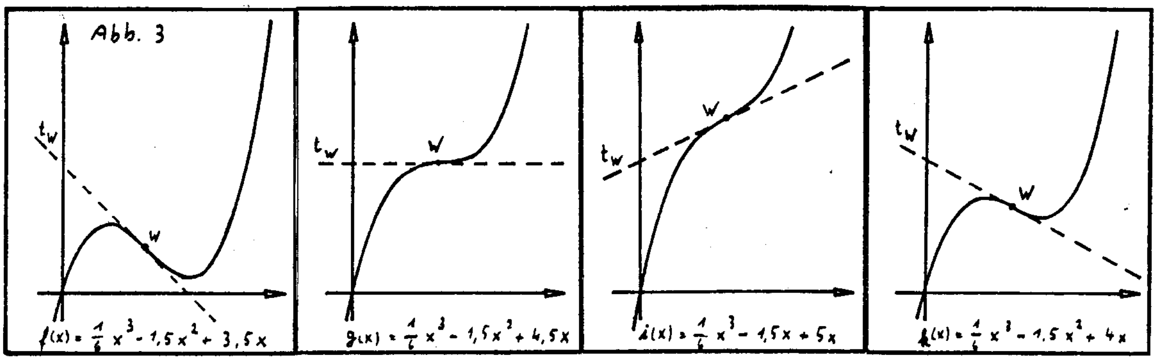
Die Form der Linien ist sehr verschieden. Sowohl über die Steigung als auch in bezug auf die Nullstellen lassen sich kaum Gemeinsamkeiten finden. Auffällig ist jedoch, daß eine Kurve besonders einfach erscheint, andere hingegen sind komplizierten gewunden. Die Windungen haben einen Bezug zu den relativen Extrema. Wieviele relative Extrema haben denn die einzelnen Kurven? Beim Abzählen der relativen Extrema fällt auf: es gibt jeweils genau eine Linien mit einem , zwei , drei bzw. vier relativen Extrema. So liegt es nah die Linien ihrer Anzahl von relativen Extrema entsprechend zu ordnen. Die sich jetzt anschließenden Linien ließen sich leicht angeben nämlich solche mit fünf, sechs , sieben , usw. relativen Extrema. Halten wir fest: Das sich zwischen den verschiedenen Linien ausdrückende Ordnungsprinzip ist das Auf- und Absteigen der jeweiligen Linien bzw. die Anzahl ihrer relativen Extrema. Das Ordnungsprinzip tritt selber nicht in Erscheinung ist aber als gestaltende , die Ordnung stiftende Idee im Hintergrund vorhanden. Dies entspricht Goethes Idee des Typus , eines die Erscheinungen verbindenden, beweglichen Ordnungsprinzipes. Es tritt selber nicht in Erscheinung , existiert jedoch real, die einzelnen Erscheinunungen konstituierend im Hintergrund [3,S.57 f]. Ein Grieche in der Antike hätte es wohl so formuliert: Der Typus ist potentiell. Interessant wird es , wenn man gewahr wird , daß dieses beweglichen Ordnungsprinzip - der Typus , den wir an geometrischen Objekten ausgebildet haben , ein algebraisches Aquivalent besitzt. Dies ist das allgemeine Polynom n-ten Grades: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$

Es ist die alle Polynome verbindende algebraische Gesetzmaßigkeit. In dieser allgemeinen Form tritt sie in dem Sinne - als Polynom dessen Graphen man zeichen konnte - nicht auf.

Rechnerisch		Geometrisch	
Beispiele (aktuell)			
Gleichung	Grad	Kurvenform	Typ
$f(x)=x^2$	2		1 rel. Extremum
$f(x)=0{,}5x^3-0{,}5x^2-3x$	3		2 relative Extrema
$f(x)=0{,}02x^4-0{,}54x^2+1$	4		3 relative Extrema
$f(x)=0{,}15x^5+0{,}075x^4 -1{,}275x^3-0{,}075x^2 +1{,}125x$	5		4 relative Extrema
...	...		...
Allgemein (potentiell , Typus)			
$P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0x^0$		Wechsel von Auf-u. Absteigen des Kurvenverlaufes bzw. (n-1) relativen Extrema	

[3]Was haben wir bisher getan? Wird sind von einigen speziellen Linien ausgegangen und haben an ihnen das sie konstituierende Ordnungsprinzip abgelesen. Dieser Typus tritt selber nicht außerlich in Erscheinung. Drehen wir die Blickrichtung einmal um. Wie kommt man vom Typus, der potentiell ist, der real und prinzipiell verborgenbleibend im Hintergrund existiert , zu den konkreten äußerlich als Erscheinung existierenden Linien? Wie ist der Weg von dem potentiellen Ordnungsprinzip zu den aktuellen Erscheinungen? Schaut man sich die Gleichung des allgemeinen Polynomes n-ten Grades daraufhin genauer an , bemerkt man zwei Stufen der Konkretisierung. Durch Angabe eines bestimmten Wertes für n wird aus dem allgemeinen Polynom n-ten Grades ein (noch allgemeines) Polynom z.B. 3-ten Grades. Gemeint sind nun alle Polynomfunktionen 3-ten Grades. Geometrisch entspricht dem die Gesamtheit aller Linien mit zwei relativen Extrema. Eine solche Gesamtheit nennt Goethe einen Typ - in unserem Beispiel den Kurventyp mit zwei relativen Extrema. Dem Begriff des Typen entspricht (hier) in der Algebra näherungsweise der Begriff des Grades. Der Typus als bewegliches Ordnungsprinzip beinhaltet somit verschiedene Typen. Offenbar ist mit der Wahl eines Typen die Form der Linie global festgelegt. Doch reicht dieses globale Ausgestaltung noch nicht, damit sich das potentielle, allgemeine Ordnungsprinzip in einer aktuellen , äußeren Erscheinung manifestieren kann. Diese ist erst auf der zweiten Stufe möglich. Durch Bestimmung der Koeffizienten a_3 , a_2 , a_1 und a_0 wird aus allen Polynomfunktionen 3-ten Grades eine spezielle herausgegriffen. Geometrisch entspricht dem die Auswahl einer Linie vom Kurventyp mit zwei relativen Extrema. Diese ausgewählte Linie stimmt mit dem Graphen der durch die Koeffizienten festgelegten Polynomfunktion 3-ten Grades überein. Der Graph bzw. die Linie sind aktuell , sie treten äußerlich in Erscheinung , sind spezielle Ausformnungen des Typus mit Aktualitätscharakter. Man kann sagen: Die Auswahl der Koeffizienten legt die Form der Kurve lokal fest. Diese zweite Stufe sollte man sich an einigen Beispielen verdeutlichen. Im folgenden sind durch Festlegung von Koeffizienten einige Polynomfunktionen 3-ten Grades eindeutig bestimmt (sie sind nun aktuell) und durch ihre Graphen dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente im Wendpunkt sowie die relativen Extrema eingezeichnet (Abb.3).

[3]Ist eine Polynomfunktion vom Grade n , so ist ihr Graph vom Typ (n-1). Diese Gesetzmäßigkeit ist sofort nachzuvollziehen , wenn man an die Differentialrechnung und den Zusammenhang von Funktion und 1. Ableitungsfunktion denkt.



Aufgabe: Beschreibe die Form der Graphen. Vergleiche sie mit ihren Funktionsgleichungen. Wie ist es um die Anzahl der relativen Extrema bestellt? Versuche die verschiedenen Graphen zu ordnen! Betrachte beim Ordnen auch die Funktionsgleichungen! Läßt sich die Ordnung durch neue Linien fortsetzen?

Alle Linien erscheinen als Graphen von Polynomfunktionen 3-ten Grades gleichermaßen gewunden. Was jedoch auffällt, ist daß nur zwei von ihnen jeweils zwei relative Extrema aufweisen. Die anderen besitzen keine. Faßt man den Wendepunkt und seine Tangente näher ins Auge, so sieht man: Die Steigung der Wendetangente ist sehr verschieden , was auch für die y-Koordinate des Wendepunktes gilt. Die x-Koordinaten der Wendepunkte sind bei allen Linien anscheinend gleich. Die Steigung der Wendtangente und die Große des y-Wertes des Wendpunkte bilden nun zwei mögliche Kriterien die Linien zu ordnen. Ordnet man die Linien nach zunehmender Steigung der Wendetangete bzw. größer werdenden y-Koordinaten der Wendepunkte bemerkt man, daß die Reihenfolge in beiden Fällen diegleiche ist. Ein Blick auf die Funktionsgleichungen bei dieser Reihenfolge bestärkt deren Richtigkeit. Denn es sind auch die Funktionsgleichungen geordnet und zwar nach größer werdenden Koeffizienten des x-Gliedes. Rein geometrsich ließe sich die Reihenfolge nun durch neue Linien fortsetzen. Eine neue Linie sollte einen Wendepunkt mit größerer Steigung und y-Koordinate besitzen. Als Graph einer Polynomfunktion liegt es nahen , die Gleichung $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax$ mit $a > 5$ anzunehmen. Es scheint also etwas tieferes vorzuliegen. Betrachten wir einmal bei der entstandenen Reihenfolge die Beziehung zwischen den relativen Extrema und den Wendpunkten bei den ersten beiden Linien f(x) und k(x). Bei beiden Linien liegen die relativen Extrema punktsymmetrisch zum jeweiligen Wendepunkt. Die Entfernung der relativen Extrema vom Wendpunkt ist bei der zweiten Linie im Vergleich zur ersten kleiner geworden. Man könnte sagen: Die relativen Extrema haben sich auf den Wendpunkt zubewegt. Dabei ist gleichzeitig die Steigung der Wendetangente großer geworden. In dem Augenblick , in dem beide Extrema sich im Wendepunkt treffen , ist dessen Tangente tatsächlich waagerecht. Dies ist die dritte Linie g(x). Wie geht es aber nun weiter? Im folgenden ist von relativen Extrema nichts mehr zu sehen. Behelfen wir uns zunächst mit der

Wendetangente. Diese können wir weiterdrehen , so daß die Steigung noch größer wird wie in i(x). Während die relativen Extrema bei g(x) nur vom Wendepunkt verdeckt wurden, sind sie bei der letzten Linie vollkommen (aus dem Sichtbaren) verschwunden. Sie sind komplex geworden. Eine kleine Rechnung zur Berechnung der relativen Extrema mit Hilfe des Differentialkalküles bestätigt dieses: Alle dargestellten Linien besitzen als Graphen von Polynomfunktionen die gemeinsame Form:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax$$

Deren Ableitungsfunktion lautet:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$$

Für die Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion folgt:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + a = 0$$

$$x_{1,2} = 3 +- \sqrt{9-2a}$$

Mit Fallunterscheidung:

a < 4,5 : es gibt zwei Lösungen, d.h. es existieren zwei relative Extrema

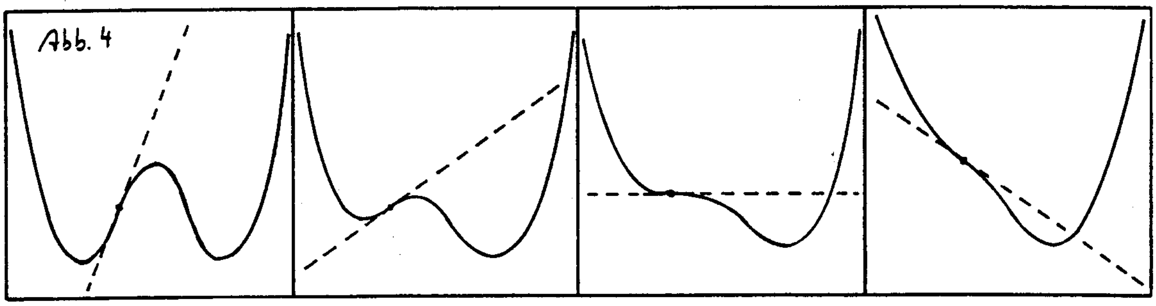
a = 4,5 : es gibt zwei zusammenfallende bzw. eine Lösungen, dies entspricht genau dem zusammentreffen der beiden relativen Extrema im Wendepunkt bei der dritten Linie d.h. g(x)

a > 4,5 : es gibt zwei komplexe Lösungen wie bei i(x)

Halten wir fest: Jeder Graph einer Polynomfunktion dritten Grades ist eine Linie vom Kurventyp mit zwei relativen Extrema. Letztere können reell - verschieden , reell-zusammenfallen oder komplex sein. Man kann verschiedene Linien ein und desselben Kurventyps durch Bewegung der relativen Extrema bzw. durch Drehung der Wendetangente ineinander überführen. Nachstehend sind einige Linien vom Typ mit drei relativen Extrema aufgeführt, die konsequent durch Aufeinanderzubewegen zweier relativer Extrema bzw. durch Drehung einer Wendetangente gewonnen wurden(Abb.4)[4].

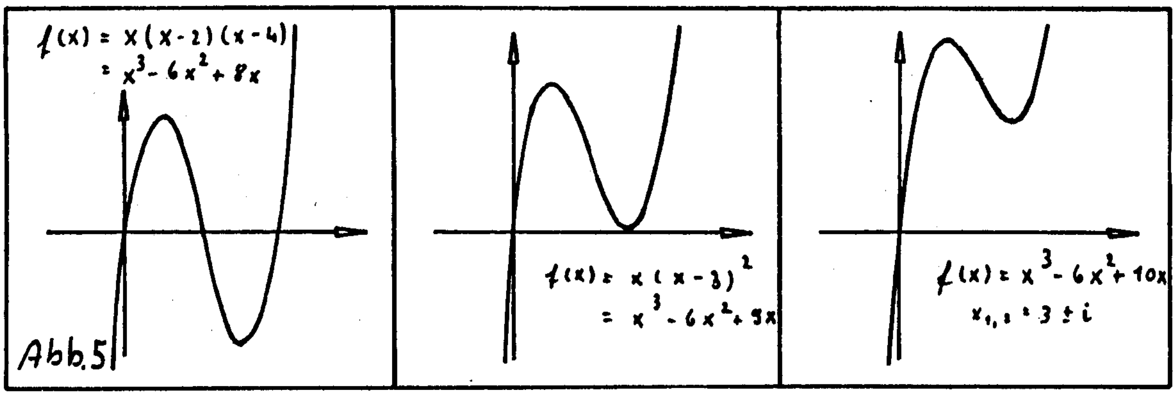
---

[4] Zur Entstehung der Kurven: Um solche Kurven rechnerisch zu erhalten , gibt man sich eine Nullstelle fix und zwei weitere Nullstellen als Parameter vor. Die dadurch bestimmte Funktion betrachtet man als 1. Ableitungsfunktion. Die Nullstellen entsprechen somit den x-Werten der Horizontalpunkte. Durch Integration ermittelt man die eigentliche Kurvenfunktion bzw. - vernachlässigt man die Integrationskonstante - eine zweiparametrige Kurvenschar. Durch geeignete Wahl der Parameter läßt sich ein "Aufeinanderzubewegen der Extrema" darstellen. Sind die beiden Parameter gleich ergibt sich ein Terassenpunkt. Für die Vorgabe von komplexen Parametern muß man beachten , daß diese nur konjugiert komplex sein können. Unterzieht man sich einaml der Aufgabe , eine solche Kurvenschar genau zu zeichnen , wird man merken , daß die wirklichen Verhältnisse noch etwas komplizierter sind als in Abb.4. Diese Kurvenschar ist aus Platzgründen vereinfacht.



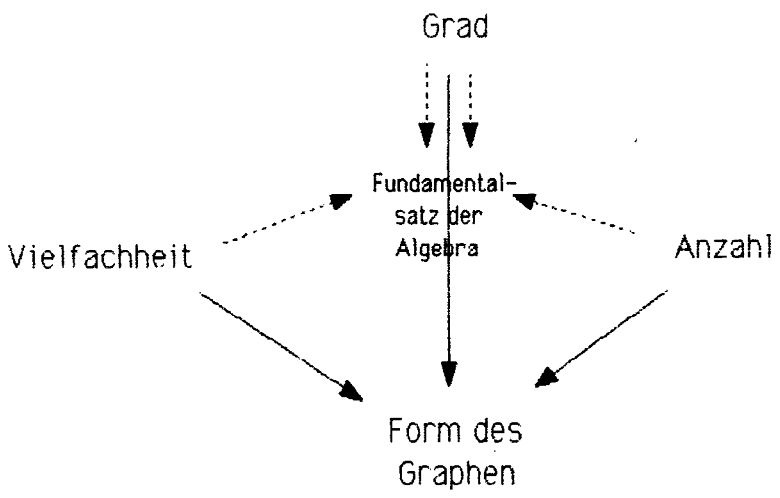
4 Nullstellenbezogene Formbeschreibung

Bei der Berechnung der relativen Extrema wurde klar, daß auch die extremabezogene Formbeschreibung in R nicht vollständig ist. Die nullstellenbezogene Formbeschreibung von Polynomfunktionen ist hinlänglich bekannt. Stichworte hierbei sind die Anzahl und Vielfachheit von Nullstellen , der Grad einer Polynomfunktion und - zentral - der Fundamentalsatz der Algebra. Der Grad bestimmt den groben Verlauf der Kurve. Wie die Vielfachheit einer Nullstelle den Kurvenverlauf in der unmittelbaren Umgebung der betreffenden Nullstelle bestimmt ist besonders schön in [1,S.58] dargestellt. So soll an dieser Stelle lediglich das Zusammenspiel der wesentlichen Begriffe am Beispiel von Funktionen dritten Grades veranschaulicht werden (Abb.5).



Von der ersten zur dritten Kurve kann man sich einen kontinuierlichen Übergang denken , indem man sich die beiden Nullstennen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ der ersten Kurve gleichmaßig sich aufeinander zubewegen läßt. Sie müssen sich dann bei $x = 3$ treffen , wodurch eine doppelte Nullstelle entsteht. Die doppelte Nullstelle kann man unter diesem Gesichtspunkt auch als zwei reell zusammenfallende Nullstellten betrachten. Im weiteren ist die Bewegung bzw. die Nullstellen komplex , was sich leicht nachrechnen läßt.

Welche Bedeutung die Begriffe , Vielfachheit , Anzahl , Grad in ihrem Zusammenspiel beim Fundamentalsatz der Algebra einerseits und für die Umsetzung von Funktionsgleichung zur Kurve andererseits besitzen , ist in der folgenden Darstellung festgehalten.



5 Vergleichende Betrachtung beider Formbeschreibungsmethoden

Hilfreich und vertiefend ist ein Vergleich der Begriffe der extrema- und der nullstellenbezogenen Formbeschreibung.

extremabezogen	nullstellenbezogen		
Typus	allg. Polynomfunktion n-ten Grades	keine in Erscheinung tretende Form, reine Gesetzmäßigkeit	potentiell-existent
Typ[5]	Grad	legt global die From fest	beide zusammen führen zur Erscheinung (-sform) aktuell-existent
	Vielfachheit,Anzahl	legen lokal die Form fest	

6 Abschließende Bemerkungen

6.1 Sind die mathematischen Vorrausetzungen wirklich gegeben , kann eine Behandlung der beiden Formbeschreibungsmethoden in dem obigen Sinne recht zügig durchgeführt werden. Zwei Unterrichtsstunden reichen erfahrungsgemäß. Natürlich kann man je nach Maß in der Genauigkeit der Darstellung sehr verschieden vorgehen , wodurch auch die Zeitdauer dieses Diskurses betroffen ist.

---

[5] Je nach Betrachtungsweise ist es auch möglich , sich einen "Typ" auch als eine Art "Untertypus" vorzustellen.

6.2 Das gesetzmäßige Überführen von einer Form in eine andere schafft ein allgemeines Verständnis für Formen. Es handelt sich hierbei - mit einem Blick in die Biologie insbesondere die Evolution - genau um Remanes viertes Homologiekriterium , das "Verknüpfen durch Zwischenformen" bzw. das Kontinuitäts- oder Stetigkeitskriterium [5,S.46ff und 285ff]. Hierauf bezogen kann die folgende Aufgabe sehr reizvoll sein.

6.3 Es gibt die Möglichkeit Kurven eines Typs in eine Kurve eines anderen Typs kontinuierlich und mit recht einfachen Mitteln zu überführen. Man betrachte die Funktionsgleichung $f(x) = 1/6x^3-3/2x^2+cx$. Die Ausgangskurve mag bestimmt sein durch c=4. Man zeichne die Kurve. Dann setze man der Reihe nach für den Parameter c die Werte c=4,3 , c=4,5 , c=5 ein und zeichne die jeweilige Kurve. Was bewirkt das Ansteigen des Parameters c. Eine Untersuchung der Funktion $f(x) = 1/6x^3-3/2x^2+cx$ mit Hilfe der Differentialrechnung kann nützlich sein und ein Verständnis für die Wahl der Werte von c wecken. Interessant wird es , den Fall $c \to \infty$ näher zu betrtachten. Inwiefern hat die Verwandlung eines Typen in einen anderen etwas mit dem Unendlichen zu tuen? Drückt sich hierdrin etwas Gesetzmäßiges aus?

6.4 Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen besteht die Hoffnung , daß die Schüler aufgrund der beiden einander ergänzenden Formbeschreibungsmethoden in die Lage versetzt werden , sich den Stoff besser zu merken. Der Pädagoge wird darüber hinaus Wert auf das Verständnis der Begriffe Typus und potentiell-aktuell legen. Vielleicht helfen diese dem einen oder anderen Schüler nicht den eigenen Leib bzw. die momentane Person als Lösung der Frage nach dem eigenen Ich , der eigenen Persönlichkeit zu betrachten. Der Typusbegriff könnte den Schüler für die Frage , was hinter der eigenen Person steht sensibilisieren. Von alten Menschen hört man häufig , daß , wenn sie auf ihr Leben zurückschauen , sie den Eindruck hätten , es würde sich durch all die Jahre und Jahrzehnte etwas wie ein roter Faden durch die eigenen Biographie ziehen. Wie hoffungsvoll , wenn ein solider mathematischer Unterricht hierzu etwas beitragen könnte!

7 Literaturverzeichnis:

[1] **Baierlein, M. et al.: Anschauliche Analysis, München: Franz Ehrenwirth Verlag, 1985**

[2] **Barfield, O.: Evolution-der Weg des Bewußtseins, Aachen: N.F. Weitz Verlag, 1991**

[3] **Kranich, E.-M.: Von der Gewißheit zur Wissenschaft der Evolution", Stuttgart: Verlag freies Geistesleben, 1989**

[4] **Locher-Ernst, L.: Geometrische Metamorphosen, Dornach: Phil.-Anthro. Verlag am Goetheanum, 1970**

[5] **Remane, A.: Die Grundlagen des Natürlichen Systems, der vergleichenden Anatomie und Phylogenetik", Leipzig: Geest&Portig1, 956**

Frank Rothe
Rudolf-Steiner-Schule Salzburg
Bayerhamerstr. 35
A-5020 Salzburg