Die individuellen Lernpotenziale der Schüler nutzen!

(Addieren von Brüchen 2 (Wiederholung))

Frank Rothe

Inhaltsübersicht

1. Lernpotenziale und Lernbedürfnisse....................................2

2. Addieren von Brüchen 2 (Wiederholung).............................4

3. Vertiefungsmöglichkeiten..5

   3.1 Addieren von Brüchen..6
   3.2 Erkennen des Aufgabenbildegesetzes...........................6
   3.3 Ergebnisse der Rechnungen...7
   3.4 Potenzen und Algebra..8
   3.5 Dezimalzahlen...9
   3.6 Zahlensysteme...10
   3.7 Probleme lösen und Strategien...................................10
   3.8 Kreative Aufgabenstellungen.....................................11

4. Anmerkungen...12

Die individuellen Lernpotenziale der Schüler nutzen!

(Addieren von Brüchen 2 (Wiederholung))

1. Lernpotenziale und Lernbedürfnisse

Große Klassen und zunehmend individuelleres Schülerverhalten - wer wüßte davon kein Lied zu singen! Schnell ist dann in fachlicher Hinsicht die Rede von Über- bzw. Unterforderung der Schüler.

Über- bzw. Unterforderung lassen sich jedoch auch unter dem Gesichtspunkt des individuellen Lernpotenzials der Schüler (im gesamten Lernprozess) betrachten .

Das Lernpotenzial oder (Er-) Lernen meint im engeren Sinn das Erfassen, Handhaben imd Weiterentwickeln von Inhalten. In diesem Sinn ist das Lernpotenzial stark bestimmt durch den aktuellen Fähigkeiten- und Fertigkeitenstand sowie die persönliche Lerngeschwindigkeit.

Hieraus entstehen persönlichen Lernbedürfnisse der Schüler.

Vergleicht man die Lernbedürfnis von Schülern, denen das Erlernen eines Unterrichts- oder Lerninhalt schwer fällt, mit denen von Schülern, denen das Lernen leicht fällt,ergeben sich erheblich Unterschiede.

Lernbedürfnisse bei unterschiedlichem Lernpotenzial[1]

niedriges Lernpotenzial (Lernen fällt schwer)	**hohes Lernpotenzial** (Lernen fällt leicht)
geringe Lerngeschwindigkeit	hohe Lerngeschwindigkeit
kleiner Lernschritte	große Lernschritte und -sprünge
immer das gleiche Erklärungsmodell	verschiedene Erklärungsmodelle sind möglich und zudem anregend
gleichbleibende "Muster-" Aufgaben	eigenen Rechenwege findend
viel Routineübungen	keine Routineübungen
kaum selbständiges Weiterentwickeln möglich	selbständiges Weiterentwickeln ist möglich und wird dringend gewünscht
Gefahr der fachlichen Überforderung, einsetzende Mutlosigkeit führt zum Aussteigen aus dem Lernprozess	Gefahr der fachlichen Unterforderung, einsetzende Langeweile führt zum Aussteigen aus dem Lernprozess

1 aus: Rothe, F. (2004): Lernen Individualisieren - Begabungen fördern. Salzburg: Selbstverlag

Alleine der Gesichtspunkt “des Übens, der Wiederholungen, der Routineübungen” verdeutlicht die Bedeutung der Lernbedürfnisse und der Lernpotenziale hervor. Damit gewinnt die Problematik der Über- und der Unterforderung zunehmend an Brisanz.

Die einen Schüler brauchen für ein Verständnis der Inhalte viel Übung und Wiederholung. Die anderen hingegen brauchen in dieser Hinsicht wenig - bis fast gar nichts. Sie fühlen sich angesprochen bei komplexeren Aufgabenstellungen, Anwendungen, analytischen Tätigkeiten, persönlichen Bewertungen und kreativem Umgang mit den Inhalten.[1]

Und damit ist ein folgenschweres Dilemma im heutigen Klassenunterricht vorprogrammiert. Denn sowohl Überforderung als auch Unterforderung können für die Betroffenen wie deren Umgebung tiefgreifenden Folgen nach sich ziehen[2]. Der individuelle Lern- und Entwicklungsprozess des Einzelnen - im Dialog mit der Gemeinschaft - ist "aus den Fugen geraten".

Das bewußte Berücksichtigen dieser unterschiedlichen individuellen Lernpotenziale kann hingegen zu einem interessanten Unterricht für ALLE führen. Sowohl Über- als auch Unterforderungssituationen lassen sich gezielt vermeiden (bzw. eingrenzen).[3]

Im Folgenden wird anhand einer konkreten Aufgabe aus dem Bruchrechnen aufgezeigt, wie das individuellen Lernpotenzial der Schüler in der Mathematik berücksichtigt werden kann. Hierfür gibt es drei Anhaltspunkt:

(1) Es gibt ein eindeutiges deklariertes Unterrichtsziel. So ist ein grundlegendes Anforderungsniveau vorgegeben. In dem Beispiel ist dies die Wiederholung des Addierens von Brüchen.

(2) Zahlreiche explizite und impliziet verborgene Vertiefungsaspekte sind in den Aufgaben enthalten.

(3) Die Aufgaben weisen ein steigendes Anforderungsprofil auf.

Die in (2) angesprochenen Vertiefungsaspekte sind in Ergänzung zum eindeutigen Unterrichtsziel aus (1) ein prinzipell offener Anteil des Unterrichts. Er ist nicht vorhersagbar - weder was die Motivation einzelner Schüler noch was den Inhalt betrifft. Jedoch lässt sich manches andenken ... in dem Bewußtsein, dass die Schüler noch ganz andere sehr interessante Fragen und Themen finden werden.

Die Grundeinstellung für den Lehrer ist dabei, dass die Schüler selber die Aufgaben "sehen" und auswählen, die ihren Fähigkeiten und dem persönlichen Niveau entsprechen. Die Frage nach der Anstrengung rangiert für die Schüler dabei deutlich hinter derjenigen nach dem Interesse.[4]

Diese Grundhaltung bedeutet für den Lehrer auch, Schüler nicht auf bestimmte "Routineübungen" festzulegen, sondern sie in ihrem eigenen - oft schnelleren - Lern- und Arbeitstempo vorgehen zu lassen."Langweilige Routineübugen" dürfen ausgelassen werden!

Eine besondere Bedeutung kommt dem kreativen Umgang mit Mathematik zu, da bei diesem Erkennen und Handeln sich zu einer Einheit verbinden.

"Und nun sollten Sie einen Stift zur Hand nehmen und das Übungsblatt "Addieren von Brüchen 2 (Wiederholung)" selber bearbeiten. Bei welchen Aufgaben "fühlen Sie sich so richtig zu hause"? Wo sehen Sie sich selber was Ihr mathematisches Lernpotenzial betrifft?" Schauen Sie vorher noch schnell einmal die Regeln für das Addieren von Brüchen nach! Das ist wichtig bevor Sie sich an das Übungsblatt begeben.

2. Addieren von Brüchen 2 (Wiederholung)

I. Addiere die Brüche

1. $=$

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$

4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$

5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} =$

7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} =$

8. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots =$

9. $\frac{1}{2} + \ldots =$

***II. Wie müßte die 15. Rechnung bei Aufgabe I. aussehen? Berechne (Extrablatt)!**

***III. Wie könnte bei Aufgabe I. die 1. "Rechnung" aussehen? Ergänze sie!**

****IV. a) Wie müßte "im Prinzip" bei Aufgabe I. die 100. Rechnung aussehen? Versuche sie aufzuschreiben. Erläutere deinen Versuch (Extrablatt)!**
b) Kannst du die 100. Rechnung vielleicht sogar ausrechnen?

****V. Betrachte die Ergebnisse bei Aufgabe I. Was fällt dir auf? Beschreibe! Vermute! Begründe!**

***VI. Überlege dir mehrere ähnliche Aufgaben (-gruppen) wie Aufgabe I. Inwiefern sind deine Aufgaben ähnlich? Worin unterscheiden sie sich? Wähle dir eine interessante Aufgabe aus und bearbeitet diese.**

3. Vertiefungsmöglichkeiten

Am Beispiel des Übungsblattes möchte ich Ihnen deutlich machen, wie die unterschiedlichen Lernpotenziale der Schüler in der Mathematik genutzt werden können[5].

Das primäre (fachbezogene) Unterrrichtsziel welches mit diese Arbeitsblatt verfolgt wird ist das Üben bzw. Wiederholen der Addition von Brüchen. Dabei soll der Titel “Addieren von Brüchen **2** (Wiederholung)” darauf hinweisen, dass hier nur ein Teil herausgegriffen ist.

Als (fachbezogene) Unterrrichtsziel geht es um die Wiederholung des Addierens von Brüchen[6]. Hier liegt der Schwerpunkt im Handeln (= üben, trainieren, festigen von Rechenmethoden). An dieser Stelle kommen Schüler auf ihre Kosten, die viel Routineübungen benötigen

Aber das Übrungsblatt enthält zahlreiche - sozusagen implizite - Möglichkeiten über diess Grundziel hinauszugehen. Die Schüler können dies entsprechend ihren individuellen Fähigkeiten bemerken und aufgreifen. Sei es in einem Erkennen von Zusammenhängen, welches aus der Rechenpraxis entsteht oder um die Umsetzung des bereits Erkannten in eine weitere Tätigkeit. Durch den kreativen Aufgabenanteil am Ende des Blattes werden mathematisches Handeln und Denken in verstärktem Maße auf die Stufe der Selbst-aktivität gehoben

Über das Grundziel hinaus handelt es sich bei diesen implizieten Erweiterungsmöglichkeiten um einen offenen - und auch bewußt offen gehaltenen - Teil des Unterrichtes.

Wenn Sie nun weiterlesen werden Sie immer wieder auf mathematische Fachfragen stoßen. Sie haben das Aufgabenblatt bearbeitet. Dann versuchen Sie selber diese Fachfragen zu beantworten. So lernen Sie ihre eigenes mathematische Lernpotenzial selber ein bischen kennen. Sie können die Schüler in deren Lernpotenzial besser empathische verstehen.

Aber um Sie nicht “ganz am ausgestreckten Arm verhungern zu lassen” habe ich für einige Fragen die Antworten als Anmerkungen beigefügt. Anderes ergibt sich aus dem weiteren Text.

3.1 Addieren von Brüchen

Fachlich wird das Addieren von Brüchen behandelt. Hauptnenner bilden und Erweitern werden als Rechenfertigkeit trainiert. Hier steht das mathematische Handeln im Vordergrund.

Während des Rechnens können die Schüler jedoch verschiedene Tricks bemerken. Haben Sie einen Trick bemerkt? Dieses Erkennen wird durch die rhythmische Struktur der Rechnungen und damit zufolge der rhytmischen Tätigkeit in der Rechentätigkeit unterstützt.

Welchem Schüler fällt der Trick mit dem Hauptnenner und Erweitern auf?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1\cdot 8}{2\cdot 8} + \frac{1\cdot 4}{4\cdot 4} + \frac{1\cdot 2}{8\cdot 2} + \frac{1}{16}$$

Der Hauptnenner steht im Nenner ganz rechts und die Erweiterungsfaktoren sind - in umgekehrter Reihenfolge die Nenner davor. Und dann wird das Addieren so einfach ...

$$\frac{1\cdot 8}{2\cdot 8} + \frac{1\cdot 4}{4\cdot 4} + \frac{1\cdot 2}{8\cdot 2} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

... denn die Zähler sind die 8, die 4, die 2 und die 1.

Welchem Schüler fällt der Trick auf mit dem “ ... das hatte ich vorher doch schon gerechnet!” Die vierte Rechnung könnte dann so aussehen:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7\cdot 2}{8\cdot 2} + \frac{1}{16} = \frac{14}{16} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$

... denn das $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ weiß der Schüler aus der Rechnung davor. Und zudem stellt sich als Erweiterungsfaktor bei allen Aufgaben immer die 2 heraus. Wieso eigentlich?

3.2 Erkennen des Aufgabenbildegesetzes

Neben seiner reinen Rechentätigkeit wird der Schüler durch die rhythmische Wiederholung angeregt, dass Bildegesetz der Aufgaben zu erkennen. Hier werden in selbstverständlicher Weise analytische Denkfähigkeiten mitgeübt.

3.3 Ergebnisse der Rechnungen

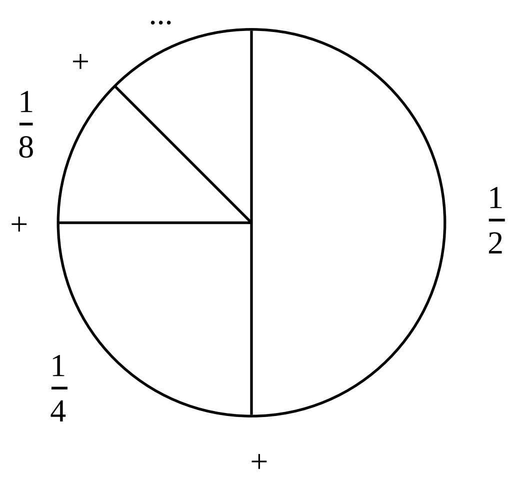
Die Ergebnisse als Brüche betrachtet geben Anlaß zu einigen Beobachtungen und Vermutungen. Und beachten Sie bitte an dieser Stelle: Alles was die Schüler an dieser Stelle beobachtet haben und nun nennen ist wichtig und richtig. Ohne diese Lehrergrundhaltung werden die Schüler Ihnen bei einem neuen Arbeitsblatt wahrscheinlich keine oder keine ehrlichen Beobachtungen mehr nennen. Was haben Sie beobachtet?

Der Nenner des Ergebnisses ist immer gleich dem Nenner des letzten Summanden.

Der Zähler des Ergebnisses ist immer genau um Eins kleiner als sein Nenner.

Und wenn Sie an den Wert das Bruches denken, so ist dieser nie größer als Eins. Sicher?[7] Aber sieht es nicht darüberhinaus so aus, als würden die Ergebnisse im Laufe der Rechnungen sich immer mehr der Zahl Eins nähern? Versuchen Sie doch einmal, diese Vermutung nur mit Hilfe der Ergebnisbrüche zu begründen.[8]

Haben Sie es herausbekommen? Es gibt einen sehr eleganten geometrischen Beweis. Gehen Sie dabei von EINEM GANZEN Kreis aus. Erkennen Sie ihn in der Skizze?



Oder ausgeschrieben $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \rightarrow 1$

Dabei soll der Pfeil andeuten, dass sich die Summe immer mehr der Eins nähert. Und machen Sie sich darauf gefaßt, dass zumindest ein Schüler sie fragt, ob die Summe denn irgendwann einmal wirklich Eins wird!

Von Bedeutung ist fernen in diesem Zusammenhang die Frage, ob vielleicht oben links nicht doch einmal eine (kleine) Lücke bleibt. Haben Sie dies vor Augen?

In der 10. oder 11. Klasse können diese Fragen bei dem Thema “Geometrische Reihen” bzw. “Folgen und ihre Grenzwerte” mit rechnerischen Mitteln eindeutig beantwortet werden.

3.4 Potenzen und Algebra

Auf dem höheren (Kenntnis-) Niveau der Potenzen und der Algebra läßt sich die Aufgabe auch betrachten.

Die wiederholte Mulitiplikation mit 2 führt zum Potenzieren

$$\frac{1}{2} \underset{\cdot 2}{+} \frac{1}{4} \underset{\cdot 2}{+} \frac{1}{8} \quad bzw \quad \frac{1}{2} \underset{\cdot 2}{+} \frac{1}{2 \cdot 2} \underset{\cdot 2}{+} \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \quad bzw \quad \frac{1}{2} \underset{\cdot 2}{+} \frac{1}{2^2} \underset{\cdot 2}{+} \frac{1}{2^3}$$

Die Schüler können die mathematische Struktur des Potenzbegriffes erkennen. Und mit diesem lassen sich die gesetzmäßigen Zusammenhänge in den Rechnunungen sehr elegant algebraisch formulieren. Dabei ergibt sich für die n-te Rechnung:

n. $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

... natürlich an dieser Stelle ohne (algebraischen) Beweis (vgl. 10./11. Kl. Grenzwerte von reometrischen Reihen).

Aber auch ohne die “Buchstaben” können die Schüler die innerere Struktur des Ergebnisses beschreiben und oder auch in Worte fassen:

Die vierte Rechnung ...

...besteht aus vier Summanden und einem Bruch als Ergebnis

4. $\quad \ldots + \ldots + \ldots + \ldots = \frac{?}{?}$

Der Nenner des letzten Summanden taucht auch im Ergebnis auf.

4. $\quad \ldots + \ldots + \ldots + \frac{}{16} = \frac{?}{16}$

Den Zähler des Ergebnisses errechnet man aus den anderen Nennern vermehrt um eins:

4. $\quad \frac{}{2} + \frac{}{4} + \frac{}{8} + \frac{1}{} = \frac{8+4+2+1}{?}$

Also insgesammt:

4. $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16}$

... und dabei ist der Zähler des Ergebnisses genau um eins kleiner als der Nenner. Und entsprechend erhalten wir das Ergebnis für die 5., die 6., die 7. ... Rechnung. Solches Erkennen von rechnerischen Strukturen ist ein zentraler Gesichtspunkt der Algebra!

Interessant können die Schüler das Ergebnis formulieren, wenn sie mit dem “... das habe ich doch schon berechnet”-Trick gearbeitet haben.

Für die vierteRechnung bedeutet dies:

In der dritten Rechnung hatten ich $\frac{7}{8}$. Und offensichtlich ist der Zähler genau um eins kleiner als der Nenner. in der vierten Rechnung muß ich mit zwei erweitern. (Sicher? Ja! Warum? Weil ...) Dabei wird aus der 8 die 16 und aus der 7. die 14. Aber gleichzeitig war die Differenz zwischen dem Zähler und dem Nenner genau eins. Diese wird ja auch verdoppelt. Also ist die differenz jetzt zwei. Doch muß ich ja noch die 1 (aus dem Zähler) von $\frac{1}{16}$ addieren. Dann ist das Ergebnis ein Bruch. Im Nenner die 16 und im Zähler - wieder die um eins kleinere - 15[9]. usw. (Anm.:... Rechnen Sie diesen Gedanken lieber selber nach bevor sie ihn an dieser Stelle einfach glauben.)

In der 7. oder 8. Klasse kann diese Aufgabe wieder aufgegriffen werden und nun mit den formalen Mitteln der Algebra behandelt werden.

3.5 Dezimalzahlen

Das Umrechnen von Brüchen in Dezimalzahlen bietet sich als zusätzliche Wiederholung an.

Dadurch erscheint die Annäherung der Ergebnisse an 1 unter einem besonders anschaulichen Blickwinkel. Die beständige Annäherung an die Zahl 1 drückt sich durch zunehmend mehr 9er direkt hinter dem Komma aus.

Auch an dieser Stelle können kreative Schüler Fragen entdecken und entwickeln. Haben sie z.B. einmal darüber nachgedacht, wieviele (von diesen) Brüchen Sie addieren müssten, damit das Ergebnis mindestens drei (oder hundert) 9er hinter dem Komma aufweist? Oder können Sie vielleicht einer Rechnung ansehen, wieviel 9er diese jedenfalls hinter dem Komma hat? Oder anders herum: versuchen Sie doch einmal einer Rechnung anzusehen wieviel 9er sie höchstens hinter dem Komma haben kann. Bekommen sie es heraus?[10]

Die Fragen nach “mindestens” und “höchstens” oder “die genaue Anzahl” und deren sprachliche Formulierung ist reizvoll für die Schüler.

In der 11./12. Klasse können solche Fragen bei den “Folgen und Grenzwerten” aufgegriffen und exakt untersucht werden (”Epsilontik”!)

3.6 Zahlensysteme

Manche Schüler - gerade solche mit einem hohen Lernpotenzial - mögen schon einmal etwas von anderen Zahlensystemen gehört haben. Hier kann es eine reizvolle Aufgabe sein, die ursprüngliche Aufgabenstellung in ein anderes Zahlensystem z.B. in das Dualsystem zu übertragen. Bekommen sie es selber hin? Was wird beispielsweise aus der zweiten Rechnung ...

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$[11]

Für die 9. Klasse stehen Zahlensysteme im Lehrplan.

3.7 Probleme lösen und Strategien

Jüngere kinder lieben oftmals Rätsel. Es ist einfach die Freude am tätigen herausbekommen dessen was dahintersteckt. Bei mathematische Probleme kann es dieselbe Lust beim Lösen - nun jedoch iin einem Fachbereich -sein. Lösungen fallen jedoch nicht einfach vom Himmel. Novalis schrieb:"Die intuitive Methode ist die systematische!" Den Schülern müssen "Werkzeuge" zum Finden von Lösungen an die hand gegeben werden. In diesem Arbeitsblatt sind zwei solcher Werkzeuge verborgen.

(a) Tabellen: Das eine ist das übersichtliche anlegen von Tabellen. Das ganze Arbeitsblatt ist äußerlich so strukturiert, dass die Aufgabenstellungen eine erste Spalte links vom Gleichheitszeichen und die Ergebnisse eine zweite Spalte rechts vom Gleichheitszeichen bilden. Tabellen strukturieren äußerlich die Inhalte, setzen Gewichtungen, schaffen Übersicht. Diese äußere Struktur regt die innere Struktur des Denkens an.

(b) Wiederholung und Invarianz: "Wenn es Wiederholung gibt, dann suche nach dem Unveränderlichen (=Invarianten) in all den Wiederholungen."[12] Dieses Prinzip wenden die Schüler beispielsweise automatisch an, wenn Sie die Ergebnisse nicht jeweils neu berechnen, sondern einfach mit der Hilfe des vorhigen Ergebnisses vorgehen. Denn ... immer taucht in einer Rechnung das Ergebnis der vorherigen auf und wird lediglich um einen Summanden ergänzt.

Wichtig ist der Umgang mit solchen Lösungsstrategien. Inwiefern man sie mit Schülern bereits bespricht, ist eine sehr spezielle - von den individuellen Fähigkeiten jedes einzelnen Schülers abhängige - Frage.

3.8 Kreative Aufgabenstellungen

Nr. VI auf dem Aufgabenblatt führt den Schüler direkt über den einfachen Rahmen von “Aufgabe und Lösung” hinaus. Die Aufgabe besitzt offene und kreative Anteile. Es gilt die (zuvor) erkannten Gesetzmäßigkeiten ihrerseits in eine neue Aufgabe zu kleiden. In dieser erschaffendenTätigkeit fallen Erkennen und Handeln zusammen.

(a) Der Hinweis auf mehrere Aufgabenmöglichkeiten soll die Phantasie in ihrer Vielfalt steigern.

(b) Unterschiede und Ähnlichkeiten benennen zu können ist eine Voraussetzung um nicht in eine Beliebigkeit der Aufgabenstellungen abzugleiten mit dem Ziel den Bezug zu der zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit sachgemäß zu wahren.

(c) Der Gesichtspunkt eine besonders interessante Aufgabe herauszugreifen und zu lösen führt wieder in die konkrete Rechentätigkeit zurück. Allerdings in eine vom Schüler selbsterschaffene!

Welche ähnlichen Aufgaben fallen Ihnen denn selber ein?

Eine Aufgabe die mich besonders fasziniert entsteht, wenn Sie mal nicht mehr mit $\frac{1}{2}$ als ersten Bruch beginnen, sondern mit $\frac{1}{3}$ *bzw.* $\frac{1}{4}$ *usw.* und fragen Sie sich, ob sich auch diese Summen immer mehr der Eins annähern. Oder einer anderen Zahl? Oder vielleicht überhaupt nicht mehr? ...
Also:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots \to ?$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots \to ?$$

$$\frac{1}{5} + \ldots$$

...

Aber sicherlich fallen Ihnen vielen interessante Aufgaben und Fragen selber ein.

Ja, dann machen Sie sich einmal an Ihre Arbeit ...

4. Anmerkungen

[1] Hier hat Bloom mit seiner Taxonomie des Denkens eine interessante Übersicht geliefert. (s. z.B. in: Rothe, F. (2004): Lernen individualiseren - Begabungen fördern. S. 42

[2] vgl. Huser, J. (2003): Lichtblicke für helle Köpfe. S. 18 ff

[3] Ein zusätzliches eingehen auf Begabungen und Interessen der Schüler eröffnet noch weiteren Differenzierungsspielraum.

[4] vgl. Csikszentmihalyi, M. und I.S. (1995): Die außergewöhnliche Erfahung im Alltag. Stuttgart: Klett-Collta

[5] Unterrichtsmaterialien die das Lernpotenzial der Schüler berücksichtigen sind auch: Rothe, F. (2004): Algebra II. und Rothe, F. (2002): Gleichungen II. ... beide Salzburg: im Selbstverlag; Bezug über Frank Rothe, Tel.=Fax.= 0043-662-665643 oder Email: frank.rothe@utanet.at; weitere materialien und Informationen unter: www.calculemus.at

[6] Dabei soll der Titel “Addieren von Brüchen **2** (Wiederholung)” darauf hinweisen, dass hier nur ein Teil herausgegriffen ist. Die Schüler müssen ja auch Hauptnenner bilden können, bei denen die Nenner teilerfremde Zahlen sind. Das kommt in diesem Übungsblatt nicht vor.

[7] Ist ja klar, weil der Zähler kleiner ist als der Nenner.

[8] Die Ergebnisse lauten $\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, ...$ Die Nenner Verdoppeln sich von Ergebnis zu Ergebnis, der Zähler ist immer um Eins kleiner als der Nenner. Wie groß ist eigentlich jeweils der unterschied eines Ergebnisses bis zur Eins? Immer $\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, ...$ weil der Zähler ja genau um eins kleiner war. Diese Brüche werden immer kleiner. Sie nähern sich offenbar zusehens der Null an und somit auch Folge der Unterschiede. M.a.W. die Ergebnisse selber nähern sich immer mehr der Zahl Eins an.

[9] An dieser Stelle klingt schon durch, was die Mathematiker später die “vollständige Induktion” nennen werden. Ein zentrales Beweisverfahren in der mthematik

[10] Wieviel 9er (direkt in einer Reihe hinter dem Komma) kann eine Rechnung höchstens besitzen? Nehmen wir zum Beispiel die 9. Rechnung also die Summe bis $\frac{1}{512}$. Diese kann nöchstens drei 9er direkt hinter dem Komma haben! Weil ... nehmen wir einmal an sie hätte mehr . Dann wäre das Ergebnis zumindest ... als Dezimalzahl geschrieben 0,9999. Was bedeutete dies für die 10. Rechnung? Richtig es könnten höchstens noch 0,0001 d.h. höchstens $\frac{1}{10000}$ hinzukommen. (Ansonsten wäre das Ergebnis ja größer als 1.). Wieviel kommt tatsächlich bei der 10. Rechnung hinzu? Die $\frac{1}{1024}$! Das ist aber größer als $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$. Dann können es doch nicht vier (geschweige denn noch mehr) 9er sein m.a.W. höchstens drei! Übertragen Sie diesen Gedankengang auf andere Rechnungen! Dabei müssen Sie dem jeweils letzten Bruch ansehen, wieviele 9er das Ergebnis höchstens haben kann. Bei $\frac{1}{512}$ waren es drei, bei $\frac{1}{1024}$ oder $\frac{1}{2048}$ sind es höchstens vier usw.

[11] $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} =$ und wie lautet das Ergebnis? Übertragen Sie analog das ganze Arbeitsblatt.

[12] s. a.: Engel, A. (1998): Problem-Solving Strategies. New York: Springer