Soll auch der Mathematikunterricht nach Schluss, Urteil und Begriff gegliedert werden?

Stephan Sigler

erschienen in:

JUPITER. Vol 2 (2007), 1661-8750

Vom Autor und in Rücksprache

mit der Redaktion autorisierte Fassung

zur Veröffentlichung auf

www.calculemus.at

Vielen Dank!!!

JUPITER, Vol. 2 (2007), ISSN 1661-8750
Verlag am Goetheanum, Dornach/Switzerland

Soll auch der Mathematikunterricht nach Schluss, Urteil und Begriff gegliedert werden?[56]

Stephan Sigler

Zusammenfassung. Die von R. Steiner angegebene Unterrichtsgliederung nach Schluss, Urteil und Begriff erweist sich auch im Mathematikunterricht der Oberstufe als tragfähig. Mit der direkten Weltberührung und Weltmitahmung, die zu einem «Schluss» führt, dem sich anschließenden, durchwärmenden, aber auch sichernden Urteil, der Weitung durch die Nacht und der am nächsten Morgen zu erringenden gedanklichen Vertiefung im Begriff wird mit den Schülern im Unterricht ein Übungsweg beschritten, der sie schrittweise zur Selbstgestaltung der Biographie anregen kann.
Keywords. Waldorfpädagogik, Mathematikdidaktik, Oberstufe.

Es gibt über die spezielle Methodik des Hauptunterrichts in der Oberstufe nur wenige Aussagen von R. Steiner. Die wesentlichen Ausführungen finden sich im 3. Vortrag vom 14. 6. 1921 im Zyklus *Menschenerkenntnis und Unterrichtsgestaltung*, dem so genannten *Ergänzungskurs* [2]. Diese Vorträge wurden gehalten, als die oberste Klasse der damaligen Waldorfschule in die 10. Jahrgangsstufe kommen sollte. Ein Jahr später, am 20. 6. 1922, fand eine Konferenz statt, in der Steiner konstatierte, dass die Lehrer mit ihren Klassen (besonders mit der obersten) nicht fertig geworden seien, «dass uns da etwas über den Kopf gewachsen ist» [1, S. 94f]. Als konkrete Phänomene wurden benannt: Die Klassen seien zerflattert, es existiere kein Wille zur selbstständigen Arbeit, die Schüler hätten kein richtiges Verhältnis zum Stoff. Im Unterricht sei zu viel doziert worden statt zu unterrichten, die Schüler hätten keine wirklichen Antworten auf ihre Fragen bekommen und es wäre die Stimmung aufgetreten, dass die Kinder nichts mit dem Unterricht anzufangen wissen. — Eine schonungslose Bestandsaufnahme, die eine Entfremdung der Schüler vom Lehrstoff deutlich kennzeichnet. Dabei habe man, so R. Steiner, zu wenig beachtet, was er mit Rücksicht auf die oberen Jahrgangsstufen am Beginn des Schuljahres vorgebracht hat [1, S. 95]. Dieser Hinweis bezieht sich auf die Vorträge des *Ergänzungskurses.* Ein Indiz dafür, die dort geschilderte Methodik ernst zu nehmen und weiter auszuarbeiten. Das ist für das Fach Mathematik besonders geboten, denn R. Steiner illustriert die Unterrichtsgliederung nur kurz am Beispiel der Fächer Physik und Geschichte. Über den Mathematikunterricht wird nicht gesprochen.

[56] Schriftliche Fassung eines Vortrags auf der Internationalen Mathematiklehrertagung 2007 in Karlsruhe

Der Schluss

R. Steiner leitet den dritten Vortrag des *Ergänzungskurses* folgendermaßen ein: «Heute möchte ich sprechen über einige Anpassungen des im Unterricht Behandelten an das Leben des kindlichen Menschen». Es wird also im Folgenden nicht um eine ganz besonders gut ausgedachte, clevere und effiziente Lehrmethode gehen, sondern es geht schlicht darum, dass das, was im Unterricht behandelt wird, an die menschlichen Lebensvorgänge anzupassen ist. Es handelt sich also nicht nur um eine «intellektuell gemütliche» Angelegenheit, die eben nur im Bereich des Intellekts verbleibt. Der Fokus richtet sich auf Lebensvorgänge des Jugendlichen und hat damit auch neben dem geistig-seelischen Aspekt einen leiblich-physischen. Nimmt man den ganzen Menschen in seiner Entwicklung im Erziehungsprozess in den Blick, ist dieser Fokus eigentlich selbstverständlich. In der Oberstufe an Waldorfschulen hört man aber davon allerdings eher selten etwas. Dort richtet man doch sehr viel stärker den Blick auf die Frage: «Was hat der Schüler gelernt?» oder: «Was muss der Schüler lernen?» Die angewendete Lehrmethode ist dabei daraufhin ausgerichtet, dass das Lernen möglichst reibungslos und im Hinblick auf einen angestrebten Abschluss erfolgsorientiert funktioniert.

Im 2. Absatz des 3. Vortrags des *Ergänzungskurses* beginnt R. Steiner mit seinen methodischen Ausführungen zum Hauptunterricht. Wenn man im Unterricht etwas Neues beginnt, sich einem neuen Thema zuwendet, schreibt R. Steiner: «Nehmen Sie nur einmal an, das Kinder hört von Ihnen irgend eine Erzählung, oder es sieht irgend etwas, das Sie ihm auf der Tafel zeigen oder dadurch, dass Sie ihm meinetwillen ein physikalisches Experiment vormachen oder aber Sie kommen in die Lage dem Kinde irgend etwas Musikalisches vorzuspielen oder dergleichen. Sie stehen ja zunächst mit alledem in einem Verhältnis zu der äußeren physischen Wirklichkeit des betreffenden Kindes. Aber dasjenige, was Sie da in das Kind hineinversetzen auf dem Umweg durch die physische Wirklichkeit durch das Auge, durch das Ohr, durch den Verstand, der das begreift, was Sie ihm beibringen, dasjenige, was da in das Kind hineinversetzt wird, das macht ja bald eine andere Daseinsform durch» [2, S. 39].

Diese Ausführungen sind in mehrfacher Hinsicht interessant und bedenkenswert. Es beginnt mit einer Lehreraktivität: Er liest etwas vor, er zeigt etwas auf der Tafel, er führt ein physikalisches Experiment vor oder er spielt etwas Musikalisches. Der Lehrer führt den Prozess der ersten Begegnung. Sie ereignet sich also nicht bzgl. der Form beliebig, sondern wird in ganz bestimmter Weise vom Lehrer veranstaltet. Dieser Prozess wird so geschildert, dass etwas in die Schüler hineinversetzt wird und zwar nicht irgendwie, sondern auf dem Umweg durch die physische Wirklichkeit: «durch das Auge, durch das Ohr und durch den Verstand, der das begreift». Der Weltbereich, dem der Schüler in dieser Phase begegnet, erscheint also in «physischer» Form und steht zunächst nur in einem «äußeren Verhältnis zu der physischen Wirklichkeit des betreffenden Kindes». Es gibt also noch keinen inneren seelischen Bezug des Kindes zu dem Vorgebrachten. Nichts ist dahingehend angewärmt worden. Es gibt keine aufstachelnden Motivationsphasen, die durch seelische Aufwallungen eine sympathische Beziehung des Schülers zum Stoff gebildet haben. Auch ist nicht die Rede von einer allgemeinen Einleitung des Lehrers über ein Thema, wie es sich an das vorhergehende anschließt, welche Aspekte im Folgenden besonders beachtet werden sollen, welche fachlichen Ziele durch die momentane Beschäftigung erreicht werden sollen oder auch, warum es gerade jetzt für die Schüler sinnvoll und biografisch wertvoll ist, sich mit dieser einen Sache zu beschäftigen. Nichts dergleichen. Es fängt mit einer gewissen Unmittelbarkeit an, von der Sache her fast ein wenig schroff und unerbittlich. Das kann man auch daran sehen, dass etwas auf dem Umweg des Physischen in die Schüler «hineinversetzt» (!) werden soll. Diese Wortwahl hat fast etwas Zwang-ausübendes. Der Lehrer bzw. die physischen Tatsachen zeigen etwas ganz bestimmtes, etwas mit scharfer Kontur, etwas ganz Besonderes im Sinne von Abgesondertem. Kurz gesagt sieht sich der Schüler einem Anprall physischer Tatsachen ausgesetzt.

Das Seelenleben, also der Astralleib und das Ich, werden über den Umweg des physischen Leibes und des Ätherleibes letztlich von außen geführt und bestimmt und machen die Sache mit. Als Beispiel für diesen Vorgang wählt R. Steiner an dieser Stelle das eurythmische Bewegen. Astralleib und Ich müssen sich dabei den Bewegungen des physischen Leibes und des Ätherleibes «anbequemen». Sie wehren sich zunächst dagegen, «was ihnen da von außen beigebracht wird durch ihre eigene Leiblichkeit» [2, S. 40]. R. Steiner spricht also vom Bewegen, von etwas Willenshaftem, was dem Astralleib und dem Ich aufgedrängt wird, nicht von Vorstellungselementen!

Dieser Vorgang wird einige Absätze später im Vortrag mit dem sog. «Schluss» zusammengebracht. In diesem «Schluss-Teil» des Unterrichts treten die neuen Phänomene für den Schüler auf, ohne dass sie schon in einen gedanklichen Rahmen eingeordnet wurden: also nicht Theorie-geleitete Wahrnehmung und Prüfung schon vorher aufgestellter Hypothesen, sondern direkter Anprall von Neuem, Dunklem in direkter Unmittelbarkeit. Dabei muss darauf geachtet werden, dass es nicht nur zu einer blassen Vorstellungstätigkeit kommt oder zu einer halbbewussten Urteilsbildung, die die Vorstellungsbilder gruppiert und zusammenstellt. Die Schüler müssen zu einem «Schluss» kommen, an dem «der ganze Mensch» beteiligt ist. Sie müssen das Erlebnis haben: So ist das also, wenn ich diese oder jene Berechnung angestellt habe. Dazu braucht es eine konzentrierte, ruhige Stimmung und Zeit. Der Lehrer darf nicht zu viel erklären müssen, unnötiges Reden ist zu vermeiden. Die Sache spricht für sich — spricht sich selbst aus. Alle Elemente und die Entstehungsweise der Phänomene sind für die Schüler in einer gewissen Weise klar durchschaubar. Sie konnten sie «verständig» wahrnehmen. Man bemerkt aber nun schon, welche Schwierigkeiten sich hier für den Mathematikunterricht ergeben: Was entspricht in der Mathematik den äußeren physischen Tatsachen der Welt?

Dieser Vorgang soll nun an einem konkreten, sehr unspektakulären Beispiel verdeutlicht werden: Die Schüler erhalten einen Arbeitsauftrag, alle Stammbrüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{32}$ als Dezimalbrüche auszurechnen und in einer Tabelle zusammenzustellen. Erteilt man nun einen solchen Arbeitsauftrag, bedeutet das für die Schüler zunächst einmal eine einfache, aber auch den Willen herausfordernde Tätigkeit. Welche Erfahrungen machen sie denn bei einer solchen Tätigkeit?

Zunächst einmal müssen die Schüler sich in den Raum der Zahlen begeben. Diesen Raum trägt jeder als Möglichkeit mit sich herum, als potentielles «Fähigkeitskostüm», das man jeweils aktualisieren kann. Dass dieser Vorgang auch etwas Besonderes und nichts Selbstverständliches ist, weiß jeder, der schon einmal in der 7. Klasse die negativen Zahlen eingeführt hat! Die Schüler müssen bei den notwendigen Divisionen viele bekannte

Vorstellungen, Begriffe und Zusammenhänge wachrufen, die ihnen erst ermöglichen, sich in dem entsprechenden Zahlenraum zu bewegen. Sie begegnen dort dem zum Teil erweiterten kleinen Einmaleins, sie müssen sich an den Divisionsalgorithmus erinnern und ihn handhaben mit all dem, was mit Kommasetzung zusammenhängt. Betrachtet man z.B. die Rechnung für $\frac{1}{7}$:

$$
\begin{array}{l}
1 : 7 = 0{,}142857\ldots \\
\underline{0} \\
10 \\
-\underline{7} \\
\quad 30 \\
-\underline{28} \\
\qquad 20 \\
\quad -\underline{14} \\
\qquad\quad 60 \\
\qquad -\underline{56} \\
\qquad\qquad 40 \\
\qquad\quad -\underline{35} \\
\qquad\qquad\quad 50 \\
\qquad\qquad -\underline{49} \\
\qquad\qquad\qquad 1
\end{array}
$$

Man sieht gleich zu Beginn die erste Hürde, dass nämlich die 7 nullmal in die 1 geht; dann der nächste Schritt des «Herunterholens» der 0 usw.; am Ende die Erleichterung darüber, dass nach dem Rest 5 wieder der Rest 1 auftaucht, so dass sich ab diesem Zeitpunkt die Divisionskette wiederholt. Diese letzte Erfahrung muss unter Umständen auch durch unnötiges Fortführen der Division errungen werden, wenn die Erinnerung aus der Unterstufe oder eine gewisse Übersicht über den Rechenvorgang fehlen. Man kann sehr genau beobachten, dass Schüler, die sehr stark in den Rechenvorgang hinein schlafen, unter Umständen erst später merken, dass sie genau die gleichen Rechenschritte nochmals vollziehen. Das Bemerken des Wiederholens der Reste bedarf allerdings eines kleinen Aufwachmoments gegenüber der eigenen Tätigkeit.

In diesem kleinen Aufwachmoment ereignet sich aber etwas sehr Bedeutsames: Im Rechnen befindet man sich in Tätigkeit, man ist ganz mit der Sache verbunden und lebt in ihr auf. Beobachtet man Schüler dabei, so kann man bemerken, dass sie eifrig tätig und gut durchblutet an den Rechnungen sitzen und in einer gewissen fraglosen Bewusstseinshaltung arbeiten. Solange sie tätig sind, fragen sie nicht nach einem «Warum» der Dinge oder gar, warum es für sie sinnvoll ist, dieses oder jenes zu tun und was das Ganze bringt. Sie sind also einerseits wach (sie rechnen ja!), andererseits auch in gewisser Weise schlafend. Die Bewusstseinshaltung ist also so zu charakterisieren, dass die Dinge sich gerade nicht dauernd in einem Gegenüberstand befinden, sondern die Schüler tätig hinein sinken dürfen, aber immer wieder durch diese kleinen Aufwachmomente dem Ergebnis oder den kleineren Teilergebnissen gegenüberstehen und diese sehr klar und scharf empfinden, ihrer als «Eindeutiges» habhaft werden und gleichzeitig in dieser Trennung den Nachklang der eigenen Tätigkeit, also sich selbst, fühlen. Ein zuvor willentlicher Prozess schiebt sich so zu einem ins klare Bewusstsein gehobenen Bild zusammen. Dadurch erhält der Prozess eine starke Eindeutigkeit, er gerinnt in etwas Festes, dem Fließenden Enthobenen. Der gesamte Prozess erscheint im Endergebnis der Rechnung von $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ zeitlich integriert und zusammen geschoben als Bild. In diesem Bild sind durch das Bemerken der Periodizität sogar Rechenschritte integriert, die noch überhaupt nicht ausgeführt wurden. Man überschaut den Prozess als Gesamtes. Gleichzeitig ist das Erleben des Rhythmischen in der Rechentätigkeit zu Gunsten des Festgestellten und als solches Gewordenen zurückgedrängt.

Es wird deutlich, dass bei dem eben geschilderten Vorgang alle Bereiche des Menschen betätigt werden. Im Rechnen und im Wahrnehmen ist der Willensmensch angesprochen. Im In-Bezug-setzen zu den Dingen, also dem Pendeln zwischen dem Zustand des Bei-sich-Seins und des Gegenüberstehens und vor allem auch in dem anfänglichen sich die Sachen urteilsmäßig Zusammentragen, dem untergründigen Evidenzerlebnis der Richtigkeit der Rechnungen lebt der Schüler im Bereich des Gefühls. Wenn der Prozess des Rechnens zum Endpunkt kommt, kommt es auch zur Vorstellungsbildung, in der der vollzogene Schluss bewusst und damit auch aussprechbar wird.

Leichter und trivialer stellt sich die Sache bei Brüchen wie $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{3}$ dar. Der Fall $\frac{1}{6}$ bietet noch einen kleinen Moment des Anstoßes: nämlich das Wiederholen erst nach der Vorziffer 1. Gleichzeitig mischt sich in das Rechnen schon die Frage, wie der entstehende Dezimalbruch denn aussehen wird, *endlich*, *reinperiodisch* oder *gemischtperiodisch*: Oft werden diese drei Fälle von Schülern nicht so scharf getrennt; es entsteht vielmehr die Frage, ob die Rechnung anstrengend wird oder relativ bequem oder schwierig oder leicht. Die Zahlen und ihre Qualitäten sprechen sich in diesem besonderen Zusammenhang gefühlsmäßig aus, was erst eine Vorstufe zu der eher sachlich konturierten Erfahrung bildet. Neben diesen Erfahrungen und Erkenntnissen bildet sich natürlich auch noch ein Gefühl für den Zusammenhang von Brüchen und Dezimalbrüchen, nämlich dass es sich beides Mal um das gleiche handelt, nur in verschiedener Schreibweise. (Für die Zusammenstellung der Ergebnisse siehe Tabelle 1 auf Seite 148.)

Schon bei einem solchen doch relativ einfachen Beispiel wird die Charakteristik mathematischer Erfahrung deutlich: Den Zahlenraum, in dem sich die Schüler bewegen müssen, bringen sie selbst hervor. Niemand, auch nicht der Lehrer, kann ihnen diese Tätigkeit abnehmen: Wenn die Schüler diesen Zahlenraum nicht innerlich aufbauen, können sie sich auch darin nicht bewegen. Dies ist zunächst eine außerordentlich selbstverständliche Aussage, birgt aber doch eine gewisse Brisanz, ist doch die Mathematik die einzige Disziplin, in der der Untersuchungsgegenstand von den Schülern vollständig selbst hervorgebracht werden muss. Bei jeder anderen Erkenntnis muss natürlich der begriffliche Anteil, also streng genommen der «Inhalt», auch vollständig selbst hervorgebracht werden. Er wird aber mit Hilfe einer Wahrnehmung gebildet oder besser gesagt, er wird an einer Wahrnehmung gebildet. Die Wahrnehmung bestimmt gewissermaßen eine Richtung der Begriffsbildung. Sie verschmilzt mit dem zu ihr gebildeten Begriff zur Erkenntnis. Das Willenshafte in der Wahrnehmung und in der Sinnesempfindung bleibt vollständig unbewusst und wird verschlafen. Im Mathematischen verhält es sich anders: *Hier ist eine willentliche Betätigung des Menschen aus sich heraus notwendig, um etwas hervorzubringen, was danach Erfahrung werden kann.* Damit hängt natürlich zusammen, dass alle Mathematiker davon sprechen, mathematische Gesetze zu «entdecken». Mathematik hat

$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$
$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$
$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$	$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$
$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$
$\frac{1}{10} = 0{,}1$	$\frac{1}{11} = 0{,}\overline{09}$
$\frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3}$	$\frac{1}{13} = 0{,}\overline{0769230}$
$\frac{1}{14} = 0{,}0\overline{714285}$	$\frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6}$
$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	$\frac{1}{17} = 0{,}\overline{0588235294117647}$
$\frac{1}{18} = 0{,}0\overline{5}$	$\frac{1}{19} = 0{,}\overline{052631578947368421}$
$\frac{1}{20} = 0{,}05$	$\frac{1}{21} = 0{,}\overline{047619}$
$\frac{1}{22} = 0{,}0\overline{45}$	$\frac{1}{23} = 0{,}\overline{0434782608695652173913}$
$\frac{1}{24} = 0{,}041\overline{6}$	$\frac{1}{25} = 0{,}04$
$\frac{1}{26} = 0{,}0\overline{384615}$	$\frac{1}{27} = 0{,}\overline{037}$
$\frac{1}{28} = 0{,}03\overline{571428}$	$\frac{1}{29} = 0{,}\overline{0344827586206896551724137931}$
$\frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3}$	$\frac{1}{31} = 0{,}\overline{032258064516129}$
$\frac{1}{32} = 0{,}03125$	

Tabelle 1: Zusammenstellung der Ergebnisse: Alle Dezimalbrüche zu den Stammbrüchen $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{32}$.

eine starke Begegnungsqualität, trotzdem die Inhalte völlig selbstständig hervorgebracht werden.

Welches ist also die Qualität des Steinerschen Schlusses? Zunächst einmal war wichtig, den Arbeitsauftrag ohne jegliche weitere Erklärungen zu geben. Alle inhaltliche Einbettung in schon vorhandene Zusammenhänge verhindert, dass die Schüler der Sache rein und unvoreingenommen *begegnen* dürfen. Eine Einleitung wie zum Beispiel: «Wir möchten nun einmal erfahren, welche Arten von Dezimalbrüchen sich ergeben, wenn man die Brüche in solche verwandelt.» oder noch zweifelhafter: «Wenn ihr die folgenden Rechnungen ausführt, achtet doch bitte einmal auf die Ergebnisse; es müssten sich drei verschiedene Typen ergeben, die ihr auch schon aus der Unterstufe kennt!» zentriert die Aufmerksamkeit schon auf einen ganz bestimmten Aspekt des gesamten Geschehens. Dabei käme es ja gerade darauf an, dass die Schüler diesen besonders wesentlichen Aspekt selbst entdecken und erfahren. Außerdem werden andere Erfahrungen, die beim Rechnen gemacht werden und auch in diesem Zusammenhang außerordentlich wichtig sind, nicht in gleicher Weise Erfahrung, weil sie durch die Aufgabenstellung ausgeblendet werden. Die Begegnung mit den Dezimalbrüchen wird viel stärker intellektuell vorgeprägt, damit wird sie ärmer, blasser und degeneriert zu einer Vorstellung, die sich vor eine wirklich erlebnismäßige Begegnung schiebt. Abgesehen davon nimmt man dem Schüler die Möglichkeit, selbst das Wesentliche herauszufinden. Etwas verkürzt gesagt, könnten bzw. dürften die Schüler kein eigenes Urteil entwickeln, was den eigentlichen Inkarnationswillen der Jugendlichen verletzt und hemmt.

Man kann die eben geschilderte Art des «Schlusses» mit dem Experimentieren in der Physik vergleichen, das R. Steiner in diesem Zusammenhange anführt [2, S. 42]: Das Experiment wird zunächst ohne inhaltliche Einbettung vorgeführt. Was davor geklärt sein muss, sofern es sich nicht der direkten Wahrnehmung unmittelbar erschließt, ist die Apparatur, die aufgebaut ist. Dazu sind oftmals kleinere Erläuterungen oder geschicktes Deuten, einige Handgriffe o.ä. notwendig. Während des Versuchs darf möglichst nicht gesprochen werden. Schließlich sollen die Schüler ja wahrnehmen, was auf dem Experimentiertisch vor sich geht und damit dazu eine Beziehung aufbauen. Wenn der Lehrer aber spricht, wird gerade dieses Aufbauen einer Beziehung gestört, weil der Schüler sogleich eine Beziehung zum Lehrer aufbauen muss, wenn dieser spricht. Dieses Wahrnehmen soll aber schlusshaft werden. Es soll eindeutig und vollständig durchschaubar sein, was da vorne passiert bzw. was passiert ist. Damit kann man erreichen, dass ein tatsächlicher Kontakt des Schülers zu dem Vorgeführten entstehen kann, Kontakt bis ins Physische hinein und nicht nur Kontakt mit den Vorstellungen des Lehrers oder Kontakt mit den Vorstellungen der Wissenschaft. Der Schüler bekommt einen An-«Schluss» zur Welt. Diesen kann der Schüler von sich aus (noch) nicht herstellen. Er muss veranstaltet werden. Selbst für Erwachsene ist dieser Schritt auch im wissenschaftlichen Leben ein oft noch zu erringender. Wie oft bewegt man sich ausschließlich im Vorstellungsleben und dringt überhaupt nicht zu den Tatsachen der physischen Welt vor.

Das Urteil

An diesen Schluss-Teil schließt sich die Phase der so genannten Charakterisierung an. Man soll das Ganze noch einmal rekapitulierend durchgehen [2, S. 43]. In der Physik würde man davor den Aufbau wegräumen, dass die Schüler an die Erinnerung des gerade Erlebten appellieren müssen. Man lässt Revue passieren, ohne dass die Anschauung da ist. Es bildet sich damit aus dem Vielerlei der Schlüsse etwas Einheitliches, in das sich die Schüler hineinfühlen können. Gleichzeitig können auch gefühlsmäßige Anteile und Humoriges betont werden. Es darf innerlich etwas gemütlich werden. Die Schüler können die Schlüsse innerlich befühlen, in dem sie sie noch einmal hervorbringen, so dass von ihnen ein Bezug zu den ja völlig äußerlichen Tatsachen erobert werden kann. Die Tätigkeit, die dazu notwendig ist, eine gewisse Ordnung in die Phänomene zu bekommen, nennt R. Steiner in diesem Zusammenhang das Urteilen. Im obigen mathematischen Beispiel könnte man die Ergebnisse nochmals durchgehen, ein wenig kommentieren, hie und da auf die durchlebten Anstrengungen hinweisen. Dabei kann man vorerst die Brüche in «freundliche» und «unfreundliche» Brüche einteilen usw. Meist ist es so, dass die Schüler bemerken, dass es verschiedene Arten der Dezimalbrüche gibt. Oft ergibt sich auch sofort ein Gespräch darüber, an was man erkennt, ob ein Bruch der oder jener Art angehört. Erste Vermutungen werden geäußert, die bis zu dem richtigen Urteil vordringen können, dass die Primfaktoren, in die der Nenner zerlegbar ist, für die Art des Dezimalbruchs verantwortlich sind.

Erst jetzt ist man zu einem ersten wirklichen inhaltlichen Verständnis der Dinge vorgedrungen. Das, was noch in der ersten Phase schlusshaft gewissermaßen in Vereinzelung auftrat, steht jetzt als Übersicht vor den Schülern. Das Urteilen hat die Dinge, die in einem intensiven Willensprozess hervorgebracht wurden, in ein Gesamtbild zusammengefügt.

In dieser Phase macht der Schüler sich die Dinge also noch einmal in ganz anderer Weise zu Eigen. Das Verhältnis wird freier und belebt, weil der Schüler eben nicht mehr willentlich involviert ist. Es müsste durch das Rekapitulieren ein in gewisser Weise Abgeschlossenes entstehen, was nicht unmittelbar einlädt, es intellektuell zu befragen. Das Erinnern webt die Dinge zusammen. Ein Spannungsbogen kommt zu Ende. Wollen die Schüler hier jetzt schon die gedankliche Bearbeitung beginnen und nach den sich zeigenden Gesetzen und Zusammenhängen fragen, ist entweder das sinnliche Eintauchen und die Schlussbildung nicht intensiv genug bzw. nur vorstellungsmäßig angeblasst oder die Charakterisierung ist nicht gefühlsmäßig zufriedenstellend, nicht abrundend und zusammenfassend genug gelungen. Die Schüler sollen aber mit dem Gefühl nach Hause gehen: «Donnerwetter, heute haben wir etwas Interessantes und Neues gelernt und sind bereichert worden.»

Die Nacht

Nach dieser Phase des Unterrichts ist der Hauptunterricht zu Ende. Die Schüler werden entlassen. Am nächsten Tag, nachdem sie einmal geschlafen haben, werden die Inhalte des Vortages wieder thematisiert. R. Steiner schildert nun, wie sich in der Nacht der Astralleib und das Ich aus dem physischen Leib und dem Ätherleib herauslösen. Der Astralleib und das Ich machen die Tätigkeiten, die sie im vorherigen Wachzustand durchgemacht haben, nochmals in einer viel ausgebreiteteren und vergeistigteren Weise durch. Philosophischer könnte man vielleicht formulieren, der Astralleib und das Ich machen die Vorgänge nochmals in einer objektiven, urbildlichen Art und Weise durch und können so substanziell Wesentliches aufnehmen, was der Schüler wiederum am nächsten Morgen, wenn er in die

Schule kommt, mitbringt. Dieses «substanziell Wesentliche» darf man sich nicht als festen Inhalt, als fest definierten Begriffszusammenhang vorstellen, den die höheren Hierarchien den Schülern in der Nacht eingeflüstert haben, sondern als eine beweglichere geistige Fähigkeit, die am ersten Tag durch das Mitbewegen angelegt und durch die Wirkungen der Nacht den Schülern universalisierter und reiner am nächsten Morgen zur Verfügung steht. Formuliert man drastisch, könnte man fast sagen, dass alles wahrhaft Geistige aus der Nacht kommt, dass das Spiritualisieren der Begriffe nur dort erfolgt. Es kommt aber nur dann aus der Nacht, wenn man sich am Vortag tatsächlich in schlusshafter Art und Weise mit der physischen Welt auseinander gesetzt hat. Letztendlich ist also Geistiges nur durch Arbeit an der physischen Welt zu haben. Der geistige Funken einer Sache kann nur am Physischen geschlagen werden. Das rein nur vorstellungshaft-begriffliche Arbeiten, das meist allein als Kennzeichen für die mathematische Betätigung gilt, leitet immer auf etwas Erstarrtes hin. Mit physischer Welt meine ich in diesem Zusammenhang immer die charakterisierte Begegnungsart mit den mathematischen Objekten im phänomenologischen Sinne.

Natürlich bleibt die Tätigkeit des Vortages auch für den physischen Leib und den Ätherleib nicht folgenlos, denn auch mit ihrer Hilfe wurden ja gerade die oben geschilderten Rechenprozesse vollzogen. Auch sie haben die charakteristischen Bewegungen mitgemacht. Und auch in ihnen leben diese Erlebnisse weiter. R. Steiner spricht in diesem Zusammenhang von «Fotografien» [2, S. 44], die sich gebildet hätten. Bemerkenswert ist aber am nächsten Morgen, dass das, was Astralleib und Ich als geistige Substanz mitbringen, mit dem zusammenstimmt, was im physischen Leib und im Ätherleib entstanden ist. In diesem Zusammenstimmen läge nach R. Steiner eine besonders gesundheitlich wirkende Kraft. Um diese Zusammenhänge gedanklich wirklich zu verstehen, müsste man diese Vorgänge natürlich viel genauer schildern. Ich meine aber, dass man sie morgens in der Klasse beobachten können müsste. Es müsste deutlich werden, wenn man den Faden des Vortages in einer noch zu schildernden Art und Weise aufnimmt, dass davon etwas Belebendes, Quellkräftiges ausgeht, nichts Sklerotisierendes. Es hängt viel davon ab, ob man als Lehrer hier etwas beobachten kann, schließlich wäre das ein echtes Kriterium für guten Unterricht!

Der Begriff

Am nächsten Morgen beginnt also der Hauptunterricht mit einer Phase der gedanklichen Vertiefung und Weitung, der sog. «Betrachtungs- oder Begriffsteil». Das, was am vorigen Tage aufgenommen und anfänglich beurteilt wurde, kann jetzt begrifflich durchsetzt werden. In unserem Beispiel könnte man zum Beispiel so beginnen, dass man fragt: «Warum kommen in der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ nicht die Ziffern 0, 3, 6 und 9 vor?» Diese Frage zielt auf eine Rückbesinnung auf den Divisionsalgorithmus, wobei aber das betrachtet wird, was gerade nicht erscheint, nämlich die fehlenden Ziffern. Es genügt also nicht, nur noch einmal zu wiederholen, was man gemacht hat, sondern der Schüler muss sich einen ersten überblickshaften Standpunkt verschaffen: Er muss sich zuerst vorstellen, die Dezimalbruchentwicklung enthalte zum Beispiel die Ziffer 3. Was würde das im Divisionsalgorithmus bedeuten?

Dreimal sieben wären 21. Die nächste größere Zehner-Zahl ist 30, die aus dem Rest

3 entstanden ist. Der Rest 3 allerdings liefert die Periodenziffer 4, weil $4 \cdot 7 = 28$ ist. So kann folglich die Periodenziffer 3 in dieser Divisionskette nicht auftauchen. Ebenso überlegt man für die Ziffer 6 und 9. Dass die 0 als Periodenziffer auch nicht in Frage kommt, ist ebenfalls schnell klar. So gelangt man zu einer weiteren Erkenntnis, nämlich, dass bestimmte Reste in der Divisionskette bestimmte Periodenziffern hervorbringen. Als Übersicht kann man das folgendermaßen schreiben:

Reste	1	3	2	6	4	5
Periodenziffer	1	4	2	8	5	7

Die nächste Frage könnte sein: Welche Ziffer steht an der 73. Stelle nach dem Komma? Bei dem Beantworten solcher Fragen merkt man, dass die Erlebnisse des Vortages befestigt werden, dass die Ergebnisse als Ganzes voll durchschaubar sind und die Kenntnisse z.B. der Periodenlänge operationalisierbar gemacht werden. Mit dieser ersten kleinen Betrachtung ist man also der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ schon etwas näher getreten. In einer weiteren Stufe der begrifflichen Durchdringung kann man nun die Periodenlänge ins Auge fassen. Man kann das zum Beispiel so angehen: «Wir waren ja alle doch ziemlich erleichtert, als sich zum Beispiel bei dem Bruch $\frac{1}{17}$ die Divisionskette zu wiederholen begann. Wir haben dann aufgehört zu rechnen und haben das dann durch den Perioden-Strich über den Ergebnis-Ziffern deutlich gemacht. Können wir eigentlich sicher sein, dass sich bei jeder Dezimalbruchentwicklung eines Bruches eine solche Periode schlussendlich ergibt oder dass die Dezimalbruchentwicklung einfach abbricht? Könnte es nicht doch Brüche geben, bei denen man nie fertig wird mit der Berechnung der Ziffern der Dezimalbruchentwicklung?» Alternativ und noch offener wäre eine Frage wie: «Kann ich zu jedem Bruch seine Dezimalbruchentwicklung tatsächlich ausrechnen und hinschreiben?» Wichtig ist hier, Fragen offen genug zu formulieren, dass eine echte gedankliche Suchbewegung Platz greifen kann. Fragen wie «Wie lang kann die Periode höchstens sein?» verhindern eine solche eher als dass sie sie befördern. Das aus der Nacht an geistiger, urbildlicher Beweglichkeit Mitgebrachte kann nicht in die Beantwortung von ja/nein-Fragen, von Suggestivfragen oder reinen Wiederholungsfragen gegossen werden; es benötigt einen geistigen Raum, den es bilden und ausgestalten kann, in dem immer auch ein freiheitlicher Duktus lebt. Damit ist selbstverständlich nicht inhaltliche Beliebigkeit gemeint, sondern eine freiheitliche Atmosphäre, wenn sich Geistiges im Klassenzimmer ereignen soll.

Gefühlsmäßig ist für die Schüler völlig klar, dass eine Divisionskette, wie sie beim Berechnen einer Dezimalbruchentwicklung auftritt, irgendwann einmal abbricht oder sich ein Rest wiederholt. Aber warum? Am konkreten Beispiel $\frac{1}{7}$ lässt sich das beantworten. Dabei hilft einem die vorhergehende Analyse der Periodenziffern. Bei $\frac{1}{7}$ können nur sechs Reste $(1,\ldots,6)$, die alle kleiner als 7 sein müssen, in der Divisionskette auftreten. Die Reihenfolge des Auftretens hängt von der 7, also dem Nenner, ab und ist dann fest definiert. Das heißt, jeder Rest hat einen eindeutig festgelegten Nachfolger. Spätestens, wenn alle sechs Reste in der Division aufgetreten sind, muss die Dezimalbruchentwicklung abbrechen oder sich ein Rest wiederholen. In diesem Falle kommt nach dem Rest 5 wieder der Rest 1, so dass die Divisionskette wieder von vorne beginnt. Man hat also hier die größtmögliche Periodenlänge. Hätte sich nach dem Rest 5 ein anderer Rest ergeben, wäre

$\frac{1}{7}$ nicht reinperiodisch, sondern gemischtperiodisch mit einer geringeren Periodenlänge. $\frac{1}{7}$ kann also höchstens sechs Periodenziffern haben. Überblickt man nun die Dezimalbruchentwicklungen der Stammbrüche, kann man sehr leicht sehen, welche maximale Periodenlänge haben und welche nicht. $\frac{1}{17}$ und $\frac{1}{19}$ haben maximale Länge, wohingegen z.B. $\frac{1}{13}$ nur die Periodenlänge 6 hat.

Erkenntnis

Durch diese Einsicht hat der Schüler aber etwas Konstitutionelles der rationalen Zahlen wirklich erkannt. Etwas Wesentliches hat er sich da errungen und zwar ganz aus der Sache selbst, die er tätig hervorgebracht hat. Die Erscheinungen (die Divisionsketten) wurden transparent; durch das Betrachten der eigenen Tätigkeit erschien Allgemeines. Es war keine neue Theorie notwendig, um die Erscheinungen zu erklären. Alles lag von vornherein offen da und schon in dem begründet, was man im «Schluss» aufgenommen hatte. Diese Tatsache ist für den Unterricht von höchster Bedeutung: Alle Schüler konnten am Vortag im Schluss-Teil und im Urteils-Teil gemeinsam etwas erleben, verstehen und beurteilen. Kein Schüler war davon ausgenommen. In diesen Phasen des Vortags darf es noch keine Leistungsdifferenzierung im eigentlichen Sinne geben. Verschärft könnte man sagen, dass wenn ein Schüler diese Teile aus irgend einem Grunde nicht mehr bewältigen kann, dass er dann auch vom Unterricht als Gesamten nicht mehr zu profitieren vermag.

Im Begriffs-Teil des nächsten Morgens erlebt der Schüler ein Doppeltes: Auf der einen Seite wird das Erlebnis und das, was er am Vortag verstanden und beurteilt hat, befestigt, allgemeingültig und in den bisherigen Begriffszusammenhang eingeordnet. Es wird damit für den Schüler handhabbar und auf neue Phänomene anwendbar und übertragbar. Auf der anderen Seite weitet sich der Zusammenhang und führt zu Neuem, lädt ein, neue Gebiete zu erforschen: «Warum sind bei manchen Nennern die Perioden maximal?», «Welches ist der tiefere Grund der Periodenlänge?» usw. Solche Fragen können den Fortgang des Unterrichts beflügeln und inhaltlich lenken, in dem sie vom Lehrer aufgegriffen und u. U. an den Folgetagen bearbeitet werden.

Fazit und Konsequenzen

Ein Unterrichtsbogen beginnt mit dem «Schluss» jeden Tag in der Mitte des Hauptunterrichts, etwa um 9:00 Uhr. Dieser Unterrichtsbogen wird streng genommen nur dann biographisch wirksam, wenn er auch tatsächlich mit einem solchen «Schluss» beginnt: Der Schüler versteht etwas Neues der Welt. Wenn er hier nichts verstanden hat, versteht er auch in den nächsten beiden Unterrichtsabschnitten nichts, denn es gibt dann nichts zu beurteilen und zu begreifen. Das heißt, der Schüler muss unmittelbar verstehen, bevor er beurteilen soll, was er verstanden hat. Im Schluss ist potenziell alles enthalten, man muss es nur herausanalysieren! Ohne den Schluss mit seiner auch direkten willenshaften Weltbegegnung bleibt der Schüler den Kräften des Vergangenen, Vorgeburtlichen als der Grundlage des Vorstellens verhaftet [3, vgl. 2. Vortrag vom 22. 8. 1919]. Der Oberstufenschüler muss der Welt begegnen dürfen und nicht nur seinen Vorstellungen oder den Vorstellungen seiner Lehrer!

Alle Schüler kommen in den ersten beiden Phasen in ein Verstehen und Begreifen; die Differenzierung beginnt eigentlich erst im gedanklichen Teil. Hier aber kann dann der Lehrer einen entsprechenden Anspruch an die Gedankenbildung formulieren, weil ja eben alle am Anfang etwas verstanden und erlebt haben. Jeder ist etwas begegnet, was jetzt, den individuellen Möglichkeiten nach, vertieft werden kann. Im rein fragend entwickelnden Unterricht sind dagegen immer nur die schnellen und leistungsstärkeren Schüler bevorzugt, wohingegen bei der hier dargestellten Gestaltung die schwächeren durch den eigenen Erlebnishintergrund ganz anders mit der gedanklichen Bearbeitung umgehen können. Sie bleiben stimmungsmäßig in der Klasse drinnen und werden durch die guten Schüler in eine höhere Sphäre des Evidenzgefühls gehoben, die sie alleine nicht erreicht hätten. Ein Gefühl wie: «Dorthin möchte ich auch einmal aus eigenen Kräften kommen!» kann sich einstellen. Das eigene «Unvermögen» wirkt nicht demotivierend, sondern erhält einen Keim zur Weiterarbeit.

Gerade Mathematik wird ja oft als ein Gebäude beschrieben, wunderschön harmonisch, alles hängt mit allem zusammen, alles ist aufeinander abgestimmt. Es blinkt und blitzt. Alles ist fertig gestaltet, die Oberflächen sind glatt poliert. Nirgendwo kann man hinter diese Oberflächen schauen und das in den Blick nehmen, was diese verdecken. Wenn man sich gut benimmt, darf man da und dort noch ein Staubkörnchen wegblasen; normalerweise hinterlässt man aber nur hässliche Fingerabdrücke auf den Oberflächen, denn alles ist schon tausendfach von Fachleuten durchdacht und aufgeschrieben. Man kann es ja nachlesen. — Glücklicherweise ermöglicht der Unterrichtsgang mit Schluss, Urteil, Begriff ein Eintauchen in die bewirkenden Kräfte, das Mitleben des Erbauens! Dem gebildeten Begriff wohnt noch der Entstehungsprozess inne und damit wird er vor definitorischer Erstarrung bewahrt; er kann lebendig bleiben, offen, erweiterbar, wachstumsfähig, das Seelenleben lebendig gestaltend, so dass es wandlungsfähig und empfänglich bleibt [3, vgl. 9. Vortrag vom 30. 8. 1919].

Der Unterricht wird in dieser Weise nicht als rein kognitive Veranstaltung verstanden, der mit einigen Gefühlsanteilen, flankiert durch einige Stunden «Gliedmaßenbesänftigung» in Sport und Eurythmie, garniert wird. Sondern jeder Unterricht ist als Vorgang des ganzen Menschen aufgefasst. Mathematik wird so nicht nur intellektuelles Spiel, in dem der Schüler sich eitel selbst bespiegelt, wenn er etwas versteht und durch klug abgezirkelte Gedanken im Leben mühsam seinen Willen domestiziert und in seiner Wirksamkeit beschränkt. Der Ausgangspunkt wird ganz woanders genommen: *Der Wille und das, was der Schüler sich an ihm im Schluss erringt, wird gedanklich durchleuchtet. Das ist eine fachübergreifende Geste allen Unterrichts.* Durch sie wird angeregt, dass er lernt, nach und nach seine eigene Biografie zu entfalten und sich in der Welt einzuwurzeln, das heißt, eigene dunkle Willensimpulse bewusstseinsmäßig aufzuhellen und sie zu gestalten. Der Übungsweg des Unterrichts besteht gerade darin, den Willen und das Gefühl zu verwandeln und damit real in die Sphäre des Bewusstseins zu heben. Der erste Schritt auf diesem Wege muss allerdings vom Lehrer selbst gegangen werden, indem er sich ein «schlusshaftes» Verhältnis zur Welt erarbeitet.

Literaturverzeichnis

[1] STEINER, RUDOLF: *Konferenzen mit den Lehrern der Freien Waldorfschule 1919 bis 1924,*

Band II. Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 1975. GA 300b.

[2] STEINER, RUDOLF: *Menschenerkenntnis und Unterrichtsgestaltung.* Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 5. Auflage, 1986. GA 302.

[3] STEINER, RUDOLF: *Allgemeine Menschenkunde als Grundlage der Pädagogik.* Rudolf Steiner Verlag, Dornach, 9. Auflage, 1992. GA 293.

Stephan Sigler,
Lehrerseminar für Waldorfpädagogik,
Brabanter Str. 30,
DE 34131 Kassel,
Deutschland

E-Mail: sigler@lehrerseminar-forschung.de

Erhalten: Juli 2007